CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD 11: Introduction aux variétés différentiables 2

Jeudi 14 décembre 2006

Exercice 1

Prouver que le crochet de Lie vérifie les propriétés suivantes:

1)Il est antisymétrique.

2) Il est linéaire par rapport à chaque variable.

3) Il verifie l'identitée de Jacobi:

$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle ci-dessous:

$\frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t))$

dont l'inconnue est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to M$

On rappelle qu'après lecture dans une carte l'équation précedente peut s'écrire:

$\frac{dx^{\mu}(t)}{dt} = X^{\mu}(x(t))$

Le flot $t \to \sigma_X(t, x_0)$ du champ de vecteurs est l'unique solution de cette équation différentielle qui passe en x_0 à $t = 0$

1) Si en coordonnées locales les coordonnées de σ_X sont notées σ_X^μ écrire l'équation satisfaite par le flot.

2)Montrer que le flot satisfait la condition: $\sigma_X(t, \sigma_X(s, x_0)) = \sigma_X(t + s, x_0)$

Exercice 3

3)On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ le champ de vecteur donné par:

$X((x, y)) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ Determiner son flot.

4)On considère dans le plan $\mathbb{R}^2$ le champ de vecteur donné par:

$Y((x, y)) = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ Determiner son flot.

Exercice 4

1)Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; ensemble des matrices carrées de tailles $n \times n$ peut être muni d'une structure de variété.

2) Montrer que $Gl(n, \mathbb{R})$ est un ouvert dans l'ensemble précedent.