CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle TD1: topologie générale, espace métriques

Jeudi 5 octobre 2006

Exercice 1

Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$, Les ensembles suivants forment-ils une famille d'ouverts de X?
$\mathcal{O}_1 = \{, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$

$\mathcal{O}_2 = \{, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$

$\mathcal{O}_3 = \{, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$

$\mathcal{O}_4 = \{, \{e\}, \{b, c\}, \{a, b, c, e\}, X\}$

Exercice 2

Dans tout cet exercice on considère $\mathbb{R}$, muni de sa topologie classique (les ouverts sont les réunions d'intervalles ouverts)

Soit $A =]0, 1[\bigcup]1, 2[\bigcup(]2, 3[\bigcap \mathbb{Q})\bigcup\{4\}$

1) Représenter A sur l'axe réel.

2) Calculer $Int(A), Adh(A), Adh(Int(A)), Int(Adh(A))$,
$Adh(Int(Adh(A))), Int(Adh(Int(A)))$.

3) A est il un voisinage de $\{1/3\}$; de $\{4\}$?

Exercice 3

Dans tout cet exercice on considère $\mathbb{R}$, muni de sa topologie classique (les ouverts sont les réunions d'intervalles ouverts)

A, B sont deux parties de $\mathbb{R}$

1)Prouver que $Adh(A \bigcap B) \subset Adh(A) \bigcap Adh(B)$, mais que cette inclusion est stricte.

2)Prouver que $Adh(A \bigcup B) = Adh(A) \bigcup Adh(B)$ et que $Int(A \bigcap B) = Int(A) \bigcap Int(B)$

Exercice 4

Prouver que les distances d_1, d_2, d_∞ définies dans le cours sur $\mathbb{R}^2$ sont toutes équivalentes.

Exercice 5

Pour chacunes des parties ci-dessous de $\mathbb{R}^2$ préciser s'il sagit d'un ouvert, d'un fermé, ou ni l'un ni l'autre et expliciter son intérieur et son adhérence:

1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 \leq 1\}$

2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 < 1\}$

3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } x^2 - y^2 \leq 1\}$

4) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 \text{ et } x^2 - y^2 \geq 1\}$

5) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 2 \text{ et } x^2 - y^2 \leq 1\}$

6) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 1\}$

Exercice 6

On donne (E, d) est un espace metrique complet et $f : E \to E$ une application continue et contractante:
i.e $\forall (x, y) \in E \times E$ et $k < 1$ $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$

1) Montrer que s'il existe un point fixe a il est unique.

2) Si x_0 appartient à E, la suite définie par $x_n = f^n(x_0)$ converge vers un point fixe.