# Algèbre et analyse tensorielle MVA003
# CNAM Paris 2005-2006
# Devoir 2
# A rendre pour le lundi 28 novembre 2005

November 9, 2005

## Exercice 1

1) Montrer que les entiers $pq$ et $p(p+q-1)$ ont même parité.

On considère maintenant l'ensemble: $\{1, 2, ..., p, p+1, ..., p+q\}$

2) Déterminer la signature de la permutation qui echange 1 et 2.

3) Montrer que la permutation circulaire $c$ ci- dessous est un cycle

$c:\ (1, 2, ..., p+q) \rightarrow (2, 3, ..., p+q, 1)$

4)Montrer que la permutation ci-dessus peut être décomposée en produit de transpositions, les expliciter et en déduire la signature de $c$.

5) On considère maintenant la permutation $\tau$:

$\tau : (1, 2, ..., p+q) \rightarrow (p+1, p+2, ..., p+q, 1, 2, ..., p)$.

Demontrer que sa signature est (-1)$^{pq}$

## Exercice 2

Une particule de charge $q$ soumise a un champ éléctrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit la force de Lorentz:

$$\overrightarrow{f} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Dans cette expression, $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse de la particule. Nous supposons que les phénomènes électomagnétiques dans un certain référentiel sont déterminés par la connaissance d'un quadripotentiel dont la representation mathématique est une un forme différentielle:

$$A(x,y,z,t) = \frac{V}{c}(x,y,z,t)dt + A_x(x,y,z,t)dx + A_y(x,y,z,t)dy + A_z(x,y,z,t)dz$$

Les composantes $\frac{V}{c}$ $A_x$, $A_y$, $A_z$, sont des fonctions au moins dérivables au premier ordre. $\overrightarrow{A}$ ($A_x$, $A_y$, $A_z$) est le potentiel vecteur, $V$ le potentiel scalaire

1) Donner la dérivée exterieure de cette forme différentielle de degré 1. Les composantes de la deux forme trouvée sont les composantes du champ éléctromagnétique. En deduire:

$$\overrightarrow{E} = grad(\frac{V}{c}) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B} = rot \overrightarrow{A}$$

Si $(E_x, E_y, E_z)$ et $(B_x, B_y, B_z)$ désignent respectivement les composantes des champ éléctrique et magnétique on pose:

$$F = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dx \wedge dt + B_x dx \wedge dy + B_y dy \wedge dx + E_z dz \wedge dx$$

2) Calculer $dF$ et expliquer pourquoi $F$ est une forme fermée.

3) En déduire que les équations de Maxwell dans le vide sont:

$$rot \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$div \overrightarrow{B} = 0$$