CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle Cours 9: Dérivation d'un champ de tenseurs

Jeudi 30 novembre 2006

1 Introduction

On a précedement définit le calcul extérieur dans un espace vectoriel puis les formes différentielles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ Pour ce faire on utilise une application "lisse" qui envoie un point x de l'ouvert vers une forme multilinéaire alternée (antisymétriques). On dit aussi que l'on a définit un champ formes multilinéaires alternées. On peut faire la même chose avec des tenseurs quelconques. On définit alors des champs de vecteurs, des champs de formes linéaire et plus généralement des champs de tenseurs. On peut alors faire de l'analyse et par exemple dériver un champ. On vera cependant que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on peut toujours trouver un système de coordonnées rectiligne mais que cela n'est plus vrai si U est un ouvert de la sphère. On va devoir dune nouvelle sorte de dérivation la dérivation covariante.

2 Dérivation d'un champ de tenseur

Nous allons traiter d'abord le cas des coordonnées rectilignes. Sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ un tel système de coordonnées existe toujours.

2.1 Dérivation en coordonnées rectilignes

Si on travail dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, on peut toujours trouver un système de coordonnées rectilignes. Un système de coordonnées est dit rectiligne dans un certain espace si partant d'une origine donnée de cet espace, on peut construire des axes de coordonnées independants inclus dans cet espace permettant de repèrer les points. Considérons par exemple le champ de tenseurs suivant défini au point M:

$T(M) = t^{ij}{}_k(\mathrm{M})\ \epsilon_i \otimes \epsilon_j \otimes \epsilon^k$

Notons ϵ_i un vecteur générique de la base d'un repère rectiligne de référence. La différentielle de ce champ de tenseur est donné par:

$T(M') - T(M) = (t^{ij}{}_k(\mathrm{M'}) - \mathrm{t}^{ij}{}_k(\mathrm{M}))\ \epsilon_i \otimes \epsilon_j \otimes \epsilon^k$

M' est le point défini par:

$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = dx^i\epsilon_i$

Les composantes de $t^{ij}{}_k$ en M' vallent:

$t^{ij}{}_k(\mathrm{M'}) = \mathrm{t}^{ij}{}_k(\mathrm{x}^I + dx^I) = t^{ij}{}_k(\mathrm{x}^I) + \frac{\partial}{\partial x_I} t^{ij}{}_k dx^I + dx^I \varepsilon(dx^I)$

On en déduit au premier ordre:

$dT = \frac{\partial}{\partial x_I} t^{ij}{}_k dx^I \epsilon_i \otimes \epsilon_j \otimes \epsilon^k$

Cette quantitée désigne la différentielle du champ de tenseur dans le système de coordonnées rectilignes.

2.2 Système de coordonnées curvilignes

Sur la surface de la sphère on ne peut pas définir d'axes de coordonnées rectilignes. Donc si on suppose donné un espace "non euclidien" on peut au moins par la pensée définir s'il est de dimension n, n lignes de coordonnées indépendantes notée chacune u^i. On note alors $e_i(M)$ le vecteur tangent à la i-ème ligne de coordonnée. Etant donné une "origine" de notre "univers"

On envisagera aussi un repère fixe rectiligne: (O, ϵ_i) Il faut bien prendre garde que ce repère va engendrer des lignes de coordonnées rectilignes qui "sortirons" de notre espace "courbe" . Cependant ce repère nous servira de référence pour les calculs.

On peut généraliser les dérivées partielles; supposons que nous transitons le long de la première ligne de coordonnée, nous opérons un deplacement élémentaire;

$\overrightarrow{dM_1} = e_1 du^1$

Par analogie avec les dérivées partielles, on note souvent:

$e_1 = \frac{\partial M}{\partial u^1}$

soit:

$\overrightarrow{dM_1} = \frac{\partial M}{\partial u^1}\ du^1$

On définit de même les déplacement élémentaires et les dérivées partielles suivant les autres lignes de coordonnées.

2.3 Passages de coordonnées rectilignes curvilignes

Tout déplacement à partir de M peut s'écrire dans le repère curviligne:

$\overrightarrow{dM} = e_i du^i$

Puis dans le repère rectiligne:

$\overrightarrow{dM} = \epsilon_i dx^i$

Le vecteur est un objet "intrinsèque (indépendant d'un système de coordonnées) donc:

$e_i du^i = \epsilon_i dx^i$ On a donc:

$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^j$ puis:

$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j$

Posons maintenant:

$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = b^i_j(M)$ puis:

$\frac{\partial x^i}{\partial u^j} = a^i_j(M)$ Alors:

$du^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\ dx^j = \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial u^k} du^k$

$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}\ du^j = \frac{\partial x^i}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial x^k} dx^k$

Matriciellement il vient donc les relations:

$du^i = b^i_j(M) a^j_k(M) du^k$

$dx^i = a^i_j(M) b^j_k(M) dx^k$

En introduisant le symbole de Kronecker, il vient donc:

$du^i = \delta^i_k du^k$

$dx^i = \delta^i_k dx^k$

Alors les deux matrices sont inverses l'une de l'autre:

$b^i_j(M) a^j_k(M) = a^i_j(M) b^j_k(M) = \delta^i_k$

D'autre part:

$dM = e_i(M) du^i = \epsilon_i dx^i$

$dx^i = a^i_j(M) du^j$

Donc: $e_i(M) = a^j_i(M) \epsilon_j$

et : $\epsilon_i = b^j_i(M) e_j(M)$

3 Dérivation en coordonnés curvilignes

Soit un système de coordonnées curvilignes u^i, les bases associées en M et M' sont respectivement les $e_i(M)$ et les $e_i(M')$ Donc si on consid‘re par exemple le tenseur défini au début de cet exposé au point M on à:

$T(M) = t^{ij}{}_k(\mathrm{M})\ (e_i \otimes e_j \otimes e^k)_M$

Et au point M':

$T(M') = t^{ij}{}_k(M')\ (e_i \otimes e_j \otimes e^k)_{M'}$

Les composantes de T subissent des variations au prémier ordre données par:

$t^{ij}{}_k(M')$=t$^{ij}{}_k$(M)+dt$^{ij}{}_k$ $+\ dt^{ij}{}_k\varepsilon(dt^{ij}{}_k)$

avec:

$dt^{ij}{}_k = \frac{\partial}{\partial u^I} t^{ij}{}_k(M) du^I$

On peut donc exprimer la difference:

$T(M')$ - $T(M) =$

$t^{ij}{}_k(M)\ (e_i \otimes e_j \otimes e^k)_{M'} + \frac{\partial}{\partial u^I} t^{ij}{}_k(M) du^I\ (e_i \otimes e_j \otimes e^k)_{M'}$-$t^{ij}{}_k(M)\ (e_i \otimes e_j \otimes e^k)_M$

Cette expression n'est pas pratique car elle met en jeu deux bases différentes. Voyons ce que donne la dérivée des vecteurs de bases

3.1 Différentielles de la base; symboles de Christoffel

Pour développer $e_i(M')$ sur $e_i(M)$ On passe par l'intermédiaire de la base fixe: Si les dérivées partielles secondes obéissent au théorème de schwarz, on peut écrire:

$e_i(M')$ - $e_i(M) = [\frac{\partial x^j}{\partial u^i}(M') - \frac{\partial x^j}{\partial u^i}(M)]\epsilon_j$

$d(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}(M)) = \frac{\partial}{\partial u_k}(\frac{\partial}{\partial u_i}(x^i(M)))du^k$

Donc:

$e_i(M')$ - $e_i(M) = [\frac{\partial x^j}{\partial u^i}(M') - \frac{\partial x^j}{\partial u^i}(M)]\epsilon_j =$

$[d(\frac{\partial x^j}{\partial u^i}(M)) + du^k\varepsilon(du^k)]\epsilon_j = [\frac{\partial}{\partial u_k}(\frac{\partial}{\partial u_i}(x^j(M)))du^k + du\varepsilon(du)]\epsilon_i$

Finalement: $de_i = \frac{\partial}{\partial u_k}(\frac{\partial}{\partial u_i}(x^j(M)))du^k\epsilon_j$

Si on exprime tout dans le repère rectiligne alors:

$\epsilon_j = b^l_j(M)e_l(M) = \frac{\partial u^l}{\partial x^j}e_l(M)$

Il vient:

$de_i = \frac{\partial}{\partial u_k}(\frac{\partial}{\partial u_i}(x^j(M)))du^k\frac{\partial u^l}{\partial x^j}e_l(M)$

soit

$de_i = \frac{\partial}{\partial u_k}(\frac{\partial}{\partial u_i}(x^j(M)))\frac{\partial u^l}{\partial x^j}du^k e_l(M)$

Notation: On définit le symbole de Christoffel qu'on ecrit en permuttant j et l:

$\Gamma^j_{i,k} = \frac{\partial}{\partial u_k}(\frac{\partial}{\partial u_i}(x^l(M)))\frac{\partial u^j}{\partial x^l}(M)$

d'où:

$de_i = \Gamma^j_{i,k}e_j(M)du^k$

D'après le théorème de schwarz on a: $\Gamma^j_{i,k} = \Gamma^j_{k,i}$

On remarque alors que les symboles de Christoffel sont symétriques par rapport aux deux indices inférieurs.

3.2 Différentielles de la base duale; symboles de Christoffel (duaux)

Pour développer $e^i(M')$ sur $e^(M)$ On passe aussi par l'intermédiaire de la base fixe. On obtient alors la différentielle d'un vecteur de base dual laissé en exercice:

de^i = - $\Gamma^i_{j,k} e^j(M) du^k$

A partir de ces résultat on peut donner maintenant l'expression de la dérivée covariante c'est à dire la différentielle d'un tenseur.

3.3 Dérivée covariante

On reprend la différence:

$T(M')$ - $T(M) = t^{ij}{}_k$(M') $(e_i \otimes e_j \otimes e^k)'_M$ - $t^{ij}{}_k(M)$ $(e_i \otimes e_j \otimes e^k)_M$

A l'ordre 1 on a:

$t^{ij}{}_k(M') = t^{ij}{}_k(M)+\frac{\partial}{\partial u^l} t^{ij}{}_k(M) du^l$ + $\frac{\partial}{\partial u^l} t^{ij}{}_k(M) du^I$ $\varepsilon(\frac{\partial}{\partial u^l} t^{ij}{}_k(M) du^l)$

D'autre part,

$e_i(M') = e_i(M) + \Gamma^h_{i,l} e_h(M) du^l$

$e_j(M') = e_j(M) + \Gamma^h_{j,l} e_h(M) du^l$

$e^k(M') = e^k(M)$ - $\Gamma^h_{k,l} e^h(M) du^l$

D'où la valeur de la différence $T(M')$ - $T(M)$ uniquement en fonction de M :

$T(M')$ - $T(M) = (t^{ij}{}_k(M) + \frac{\partial}{\partial u^I} t^{ij}{}_k(M) du^I)(e_i(M) + \Gamma^h_{i,l} e_h(M) du^l) \otimes (e_j(M)$

$+ \Gamma^h_{j,l} e_h(M) du^l) \otimes (e_k(M)$ - $\Gamma^h_{k,l} e^h(M) du^l) \otimes (e_i(M) \otimes e_j(M) \otimes e^k(M)) - T(M)$

On peut donc retirer M.

$T(M')$ - $T(M) = \frac{\partial}{\partial u^l} t^{ij}{}_k du^l \ (e_i \otimes e_j \otimes e^k) + (t^{ij}{}_k \ (\Gamma^h_{i,l} e_h \otimes e_j \otimes e^k) +$

$\Gamma^h_{j,l} e_i \otimes e_h \otimes e^k)$ - $\Gamma^k_{h,l} e_i \otimes e_j \otimes e^k)) du^l$

Pour regrouper les termes dans le crochet, on remplace l'indice muet h par celui qui occupe la même place dans $(e_i \otimes e_j \otimes e^k)$ on obtien en permutant h et j:

$T(M')$ - $T(M) = (\frac{\partial}{\partial u^l} t^{ij}{}_k + t^{hj}{}_k \ \Gamma^i_{h,l} + t^{ih}{}_k \Gamma^j_{h,l}$ - $t^{ij}{}_h \Gamma^h_{k,l}) \ (e_i \otimes e_j \otimes e^k)) du^l$

Finalement en coordonnées la différentielle du tenseur donne ce que l'on appelle différentielle covariante:

$\nabla t^{ij}{}_k = (\frac{\partial}{\partial u^l} t^{ij}{}_k + t^{hj}{}_k \ \Gamma^i_{h,l} + t^{ih}{}_k \Gamma^j_{h,l}$ - $t^{ij}{}_h \Gamma^h_{k,l}) du^l$

On pose aussi:

$\nabla_l t^{ij}{}_k = \frac{\partial}{\partial u^l} t^{ij}{}_k + t^{hj}{}_k \ \Gamma^i_{h,l} + t^{ih}{}_k \Gamma^j_{h,l}$ - $t^{ij}{}_h \Gamma^h_{k,l}$

Cette quantitée est la dérivée covariante.

4 Métrique et symboles de Christoffel

Dans ce paragraphe, nous découvrons dans un cas particulier quelques caractéristiques de géométrie riemannienne. Un resultat important est le calcul de la d'erivée du tenseur métrique. On verra qu'en géométrie riemanienne la connection (i.e les symboles de Christoffels) doit être compatible avec la métrique. Cela veut dire que le produit scalaire entre deux vecteurs "en deplacement" calculé en des points différents de l'espace doit être inchangé.

4.1 Dérivée du tenseur métrique, identité de Ricci

En utilisant le paragraphe précédent, dérivée d'un tenseur, on peut donner la dérivée du tenseur métrique, on obtient:

$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial u^l} g_{ij} + g_{lj}\Gamma^l_{i,k}$ - $g_{il}\Gamma^l_{j,k}$

Ecrivons maintenant la dérivée des composantes du tenseur mêtrique à ne pas confondre avec la dérivée covariante calculer précédement:

$dg_{i,j} = de_i.e_j + e_i.de_j$

mais,

$de_i = \Gamma^l_{i,k} e_l(M) du^k$

comme :

$dg_{i,j} = \partial_k g_{il} du^k$, on déduit l'identité de Ricci:

$\partial_k g_{ij} = g_{il}\Gamma^l_{j,k} + g_{lj}\Gamma^l_{i,k}$

Cette identitée est fondamentale en géométrie riemanienne et montre (en autre) que la différentielle du tenseur métrique est nulle:

$\nabla_k g_{ij} = 0.$

4.2 Calcul des symboles de Christoffel à partir de la métrique

C'est une autre application de l'identitée de Ricci, elle montre que seule les composantes du tenseur métrique sont indispensable pour trouver les symboles de Christoffel en géométrie riemannienne.

On récrit l'identité de Ricci:

$0 = \partial_i g_{jk} - g_{mk}\Gamma^m_{ij} - g_{jm}\Gamma^m_{ik}$

Ensuite on opère une permutation circulaire sur les indices i,j,k, il vient:

$0 = \partial_j g_{ik} - g_{mk}\Gamma^m_{ji} - g_{im}\Gamma^m_{jk}$

$0 = \partial_k g_{ij} - g_{mj}\Gamma^m_{ki} - g_{mi}\Gamma^m_{kj}$

En sommant ces trois relation on à:

$2g_{mk}\Gamma^m_{ij} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij}$

En multipliant par la matrice inverse de la métrique: $g^{ik}g_{ij} = \delta^k_j$, on obtient:

$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$