# CNAM UE MVA 210 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle Cours 7: Intégration des formes différentielles

Jeudi 16 novembre 2006

## 1 Image réciproque d'une forme différentielle

Comme pour les formes de dégrés 1, un usage pratique des formes différentielle se trouve être l'intégration sur des surfaces où plus généralement des sous variétés de $\mathbb{R}^n$. Cela va nécessiter un paramétrage de ces objets. On a donc besoin d'etendre la définition d'image réciproque aux formes différentielles de degrés quelconques.

### Définition

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies, $U$ un ouvert de $E$ et $\varphi : U \to F$ une application différentiable. Soit encore $\alpha$ une forme différentielle de dégré $r$ sur l'image $\varphi(U)$. On appelle image réciproque de $\alpha$ par $\varphi$ la forme différentielle $\varphi^*\alpha$ définie par:

$$\forall X_1, X_2, ...X_r \in E,\ \varphi^*\alpha(x)(X_1, ..., X_r) = \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x).X_1, ..., \varphi'(x).X_r)$$

Cette définition généralise l'image réciproque vue pour une forme différntielle de degré 1.

## Propriétés

-L'application qui à $\alpha$ associe $\varphi^*\alpha$ est linéaire.

-Si $\alpha$ et $\beta$ sont des formes de degrés quelconques, $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$

-Si $f$ est une fonction, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$

-Si $f$ est une fonction, $\varphi^*(f\alpha) = (f \circ \varphi)\ \varphi^*\alpha$

-Si $\alpha = df$, $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$

## Commentaires

La première propriété est évidente; pour la deuxième, on peut déjà voir que c'est correcte quand on compose des 1-formes :

$\varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta(X,Y) = \varphi^*\alpha \otimes \varphi^*\beta(X,Y)$ - $\varphi^*\beta \otimes \varphi^*\alpha(X,Y)$

$= \varphi^*\alpha(X)\varphi^*\beta(Y)$ - $\varphi^*\beta(X)\varphi^*\alpha(Y)$

$= \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x).X)\beta(\varphi(x))(\varphi'(x).Y)$ - $\beta(\varphi(x))(\varphi'(x).X)\alpha(\varphi(x))(\varphi'(x).Y)$

$= \alpha(\varphi(x)) \otimes \beta(\varphi(x))(\varphi'(x).X, \varphi'(x).Y) - \beta(\varphi(x)) \otimes \alpha(\varphi(x))(\varphi'(x).X, \varphi'(x).Y)$

$=(\alpha \otimes \beta)(\varphi(x))(\varphi'(x).X, \varphi'(x).Y) - (\beta \otimes \alpha)(\varphi(x))(\varphi'(x).X, \varphi'(x).Y)$

$= \varphi^*(\alpha \wedge \beta)(X,Y)$

On étend ce calcul aux formes de degrés superieures. Les deux propriétés suivantes sont assez evidentes, voyons la dernière:

$df(\varphi(x)).(\varphi'(x).X) = d(f \circ \varphi)_x.X$

On reconnait la composée des différentielles.

## 1.1 Exemple détaillé de calcul d'image réciproque

Nous nous proposons de calculer le pull-back de $dx \wedge dy$ dans le passage en coordonnées polaires:

$(r, \theta) \mapsto \varphi(r, \theta) = (x, y) = (rcos\theta, rsin\theta)$

Pour se faire on calcule d'abord $\varphi^* dx$ puis $\varphi^* dy$:

On applique la définition d'image réciproque: $(h_1^r, h_2^\theta)$ est le vecteur accroissement dans l'espace des paramètres et $(h_1^x, h_2^y)$, le vecteur accroissement dans l'espace (x,y) avec la relation:

$$\begin{pmatrix} h_1^x \\ h_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsin\theta \\ sin\theta & rcos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1^r \\ h_2^\theta \end{pmatrix}$$

$\varphi^* dx_{(r,\theta)}(h_1^r, h_2^\theta) = dx_{(\varphi(r,\theta))}(h_1^x, h_2^y)$

*Donc* :

$\varphi^* dx_{(r,\theta)}(h_1^r, h_2^\theta) = \mathrm{dx}_{(\varphi(r,\theta))}(cos\theta h_1^r - rsin\theta h_2^\theta, sin\theta h_1^r + rcos\theta h_2^\theta)$

Et comme:

$dx_{(\varphi(r,\theta))}(cos\theta h_1^r - rsin\theta h_2^\theta, sin\theta h_1^r + rcos\theta h_2^\theta) = \cos\theta h_1^r - rsin\theta h_2^\theta$

$dr(h_1^r, h_2^\theta) = h_1^r$

$d\theta(h_1^r, h_2^\theta) = h_2^\theta$

finalement:

$\varphi^* dx_{(r,\theta)}(h_1^r, h_2^\theta) = cos\theta dr(h_1^r, h_2^\theta) - rsin\theta d\theta(h_1^r, h_2^\theta)$

Soit:

$\varphi^* dx_{(r,\theta)}(h_1^r, h_2^\theta) = (cos\theta dr - rsin\theta d\theta)(h_1^r, h_2^\theta)$

On calcul de même l'image réciproque de $dy$.

Enfin, $\varphi^*dx \wedge \varphi^*dy = rdr \wedge d\theta$

# 2 Integration d'une p-forme différentielle

On veut généraliser ici l'integrale d'une 1-forme sur un chemin: On etend ainsi la paramétrisation d'une courbe a celle d'une surface, d'une hypersurface....

## 2.1 Nappe paramétrée

Une nappe paramêtrée ou paramétrisation de dimension $p$ et de classe $\mathcal{C}^1$ est une application $\varphi$ d'un ouvert $D$ de $\mathbb{R}^p$ dans $E = \mathbb{R}^n$. Deux nappes paramêtrées sont $\mathcal{C}^1$-équivalentes quand le changement de domaine de départ induit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Si de plus si le jacobien de $\varphi$ est positif les deux nappes ont la même orientation.

## 2.2 Integration d'une p-forme sur une nappe

Pour integrer il suffit de se rammener sur un domaine $D$ compact de $\mathbb{R}^p$ par "pull-back" (image reciproque) Alors, l'integrale de la p-forme sur une nappe $\varphi$ est: $\int_D \varphi^*\alpha$

## 2.3 Exemple: intégrales de surface

On considère le cas des nappes géométriques de $\mathbb{R}^3$ donc des applications:
$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$: $(u, v) \mapsto (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$
Pour calculer une intégrale de surface, Il faut evaluer une forme différentielle de degré 2 sur cette surface. Il faut donc determiner son image réciproque sur le paramètrage choisi Donc soit:

$$\alpha(x, y, z) = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy :$$

Pour calculer le Pull-back commencons par calculer l'image réciproque de chacune des composantes de l'application On a:

$\varphi^* dX = d(X \circ \varphi) = X'_u du + X'_v dv$

$\varphi^* dY = d(Y \circ \varphi) = Y'_u du + Y'_v dv$

$\varphi^* dZ = d(Z \circ \varphi) = Z'_u du + Z'_v dv$

Donc comme $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$ On a:

$\varphi^*(dX \wedge dY) = (X'_u Y'_v - X'_v Y'_u)\ du \wedge dv$

$\varphi^*(dY \wedge dZ) = (Y'_u Z'_v - Y'_v Z'_u)\ du \wedge dv$

$\varphi^*(dZ \wedge dX) = (Z'_u X'_v - Z'_v X'_u)\ du \wedge dv$

d'autre part :

$\varphi^*(P) = P \circ \varphi$ et $\varphi^*(PdY \wedge dZ) = \varphi^*(P)\varphi^*(dY \wedge dZ)$

$\varphi^*(Q) = Q \circ \varphi$ et $\varphi^*(QdZ \wedge dX) = \varphi^*(P)\varphi^*(dZ \wedge dX)$

$\varphi^*(R) = R \circ \varphi$ et $\varphi^*(PdX \wedge dY) = \varphi^*(R)\varphi^*(dX \wedge dY)$

finalement l'image réciproque $\varphi^*\alpha$ est:

$((\mathrm{P} \circ\varphi)(Y'_u Z'_v - Y'_v Z'_u) + (Q\circ\varphi)(Z'_u X'_v - Z'_v X'_u) + (R\circ\varphi)(X'_u Y'_v - X'_v Y'_u))\ du \wedge dv$

Une notation consacrée permet de poser:

$Y'_u Z'_v - Y'_v Z'_u = \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}$

$Z'_u X'_v - Z'_v X'_u = \frac{D(Z,X)}{D(u,v)}$

$X'_u Y'_v - X'_v Y'_u = \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}$

D'où la formule de l'intégrale de surface sur la nappe $\Sigma$:

$\int_\Sigma \alpha = \int\int_D (P\circ\varphi \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)} + Q\circ\varphi \frac{D(Z,X)}{D(u,v)} + R\circ\varphi \frac{D(X,Y)}{D(u,v)})\ du \wedge dv$

## Exercice

On considère le paramétrage "classique":

$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$: $(x,y) \mapsto (x,y,f(x,y))$

Donner l'expression de l'intégrale de surface dans ce paramêtrage.

## Interpretation géométrique flux

On reprend la surface paramêtrée:

$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$: $(u,v) \mapsto (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$

Les vecteurs: $\varphi'_u = (X'_u, Y'_u, Z'_u)$ et $\varphi'_v = (X'_v, Y'_v, Z'_v)$

sont les vecteurs tangents au courbes de niveaux respectives "v =cst" et "u = cst". Donc le produit vectoriel de ces vecteurs représente le vecteur normal $\overrightarrow{N}$ a la surface ces composantes sont:

$Y'_u Z'_v - Y'_v Z'_u = \frac{D(Y,Z)}{D(u,v)}$

$Z'_u X'_v - Z'_v X'_u = \frac{D(Z,X)}{D(u,v)}$

$X'_u Y'_v - X'_v Y'_u = \frac{D(X,Y)}{D(u,v)}$

Ainsi posant $\overrightarrow{V} = (P,Q,R)$ l'intégrale s'écrit:

$\int_\Sigma \overrightarrow{V}(\varphi(u,v)). \parallel \overrightarrow{N}(u,v) \parallel \overrightarrow{h}(u,v) du \wedge dv$

Dans cette expression $\overrightarrow{h}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface au point considèré. La norme du produit vectoriel :$\overrightarrow{N}(u,v) = \varphi'_u \wedge \varphi'_v$ est l'aire de l'element de surface. L'interprétation physique de l'integrale de surface est le flux d'un champ de vecteur à travers une surface.

## Exemple d'application

Calculons de deux manière différentes le flux du Champ de vecteur $\overrightarrow{V}(y, x, y+z)$ a travers la surface du triangle défini par les ínéquations :$(2x + y + z = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

### Méthode 1 par l'image réciproque d'une forme différentielle

On reprend le paramétrage "classique":

$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$: $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$

Il suffit de déterminer le pull- back de la 2-forme:

$\alpha(x, y, z) = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy$ :

Où ici les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{V}$ sont en correspondances bijectives avec celles de la forme $\alpha$, donc

$P(x, y, z) = y$

$Q(x, y, z) = x$

$R(x, y, z) = y + z$

Le pull-back des trois fonctions est donné par:

$\varphi^*(P)(x, y, z) = P \circ \varphi(x, y) = y$

$\varphi^*(Q)(x, y, z) = Q \circ \varphi(x, y) = x$

$\varphi^*(R)(x, y, z) = P \circ \varphi(x, y) = y + (2 - 2x - y)$

Le pull-back des trois formes est donné par:

$\varphi^*(dx \wedge dy) = (x'_x y'_y - x'_y y'_x)\ dx \wedge dy = dx \wedge dy$

$\varphi^*(dy \wedge dz) = (y'_x z'_y - y'_y z'_x)\ dx \wedge dy = -f'_x(x, y)dx \wedge dy$

$\varphi^*(dz \wedge dx) = (z'_x x'_y - z'_y x'_x)\ dx \wedge dy = -f'_y(x,y) dx \wedge dy$

On trouve alors:

$\varphi^* \alpha(x,y,z) = 2y dx \wedge dy + x dx \wedge dy + (2-2x) dx \wedge dy$

On se rammène a l'intégrale double sur le domaine D projection du triangle su l'espace des paramêtres $(x,y)$:

$\int\int_D (2y + x + (2-2x)) dxdy$

**Méthode 2 par calcul du flux**

On calcul le vecteur normale donné par :

$\overrightarrow{N} = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial y}$

Donc $\overrightarrow{N} = (1,0,-2) \wedge (0,1,-1) = (2,1,1)$

On calcul alors:

$\int\int_D \overrightarrow{N}(x,y).\overrightarrow{V}(\varphi(x,y)) dxdy$

c'est l'intégrale précédente.

On calcul alors l'intégrale:

$\int_0^1 \int_0^{2-2x} (2y - x + 2) dxdy = 3$