CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle Cours 6:
Formes différentielles de degrés p sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Jeudi 9 novembre 2006

1 Forme multilinéaire altérnées dans un espace vectoriel de dimension finie

On se donne à present un espace vectoriel de dimension finie noté E_n. Le lien entre les formes multilinéaires alternées et les formes différentielles de l'analyse vient avec l'expression des formes multilinéaires dans une base de l'espace vectoriel E_n.Donc, soit:

$e_1, e_2, ..., e_n$ une base de E_n

$e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*$ une base du dual E_n^*

on redonne l'expression du produit tensoriel de deux formes multilinéaires:

$\varphi \otimes \psi(x_1, ..., x_{p+q}) = \varphi(x_1, ..., x_p)\psi(x_{p+1}, ..., x_{p+q})$

Donc par itérations:

$e_1^* \otimes e_2^* \otimes ... \otimes e_p^*(x_1, ...x_p) = e_1^*(x_1)e_2^*(x_2)..., e_p^*(x_p)\ \forall p$

Dans chaque expression, x_i désigne un vecteur de l'espace vectoriel E_n. L'antisymétrisation de la formule précedente donne alors:

$\overline{e_1^* \otimes e_2^* \otimes ... \otimes e_p^*}(x_1, ...x_p) = \frac{1}{p!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) e_1^* \otimes e_2^* \otimes ... \otimes e_p^*(x_{\sigma(1)}, ...x_{\sigma(p)})$

Il vient donc:

$\overline{e_1^* \otimes e_2^* \otimes ... \otimes e_n^*}(x_1, ...x_p) = \frac{1}{p!} \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)}) e_2^*(x_{\sigma(2)})..., e_p^*(x_{\sigma(p)})$

On rappelle que l'on définit alors le produit extérieur qui vérifie:

$\varphi \wedge \psi = \frac{(p+q)!}{p!q!} \overline{\varphi \otimes \psi}$

Donc toujours par itération et en introduisant des formes différentielles de degré 1:

$e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_p^* = p! \overline{e_1^* \otimes e_2^* \otimes ... \otimes e_p^*}$

On en déduit une expression dans laquelle le "$p!$" disparait:

$e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_p^*(x_1, ...x_p) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) e_1^*(x_{\sigma(1)}) e_2^*(x_{\sigma(2)})..., e_p^*(x_{\sigma(p)})$

Ou en posant $\rho = \sigma^{-1}$:

$e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_p^*(x_1, ...x_p) = \sum_\rho \varepsilon(\rho) e_{\rho(1)}^*(x_1) e_{\rho(2)}^*(x_2)..., e_{\rho(p)}^*(x_p)$

Soit:

$e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_p^*(x_1, ...x_p) = \sum_\rho \varepsilon(\rho) e_{\rho(1)}^* \otimes e_{\rho(2)}^* \otimes ..., \otimes e_{\rho(p)}^*(x_1, ..., x_p)$

On vient donc d'exprimer le produit exterieur de p formes linéaires de degré 1 comme l'antisymétrisé du produit tensoriel de p formes. On va pouvoir ainsi en analyse definir donc les formes différentielles de degrés p suivant ce procédé: pour calculer le produit extérieur de p formes il suffit d'additionner algébriquement toutes les permutations du produit tensoriel des p formes, ponderer par le signe de la permutation du facteur:

$e_1^* \wedge e_2^* \wedge ... \wedge e_p^* = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) e_{\sigma(1)}^* \otimes e_{\sigma(2)}^* \otimes ..., \otimes e_{\sigma(p)}^*$

Théorème

L'ensemble des p-formes multilinéaires alternées est un espace vectoriel de dimension: $\mathbb{C}_n^p$, engendré par les éléments: $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge ... \wedge e_{i_p}^*$. avec $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$

La demonstration (très simple compte tenu de ce qui vient d'être développé) est laissée au lecteur (curieux).

On vient de construire l'espace $\Lambda_p^*(E_n)$, en particulier aussi $\Lambda_p^*(\mathbb{R}^n)$, qui nous interesse pour l'analyse vers laquelle nous revenons à present.

2 p-formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

On se rappelle qu'une 1-forme différentielle est une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\Lambda_1^*(\mathbb{R}^n)$ $(= \mathbb{R}^n)^*)$.

De même une 0-forme sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$) est simplement une fonction: c'est à dire une application de U dans $\Lambda_0^*(\mathbb{R}^n)$ ($=\mathbb{R}$), plus généralement :

Définition

Une p-formes différentielles définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application de U dans $\Lambda_p^*(\mathbb{R}^n)$. Si cette application est de classe $\mathcal{C}^r$ on dit que la p-formes différentielles est de classe $\mathcal{C}^r$. On peut l'exprimer dans la base des $e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge ... \wedge e_{i_p}^*$. avec $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$ Alors:

$x \in U \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1,...,i_p}(x) e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge ... \wedge e_{i_p}^*$

On a coutume en analyse, de noter $e_{i_q}^*$ par dx_{i_q}:

$x \in U \mapsto \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1,...,i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$

L'espace des p-formes différentielles est noté: $\Omega_p(U)$

Dans la littérature on utilise l'une ou l'autre de ces notations. On a introduit le produit exterieur de deux p-formes linéaires. On transpose directement cette notion en analyse et on obtient le produit exterieur de deux formes différentielles posons:

$\omega(x) = \sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_p\leq n} \omega_{i_1,...,i_p}(x)dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ une p-forme

$\omega'(x) = \sum_{1\leq j_1<j_2<...<j_q\leq n} \omega'_{j_1,...,j_q}(x)dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_q}$ une q-forme

Définition: produit extérieur

Soit ω, ω' respectivement p et q formes définie sur U on sait définir en chaque point x de l'ouvert U $\omega(x) \wedge \omega'(x)$ on définie ainsi le produit extérieur de deux formes différentielles.

2.1 Dérivation extérieure

On suppose sauf avis contraire que tous les objets définies sont $\mathcal{C}^\infty$. Nous avons une application naturelle:

$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U)$

L'application d est la dérivation. Existe t'il un prolongement naturelle de cette application aux forme de degré quelconque? la reponse est oui. Cela permet de définir ce qu'on appelle le complexe de De Rham:

Définition : Complexe

On appelle complexe une suite d'espaces vectoriels E_i (ou plus généralement de modules $\mathbf{M}_i$) muni d'une application d de E_i dans E_{i+1} pour tout i telle que $d \circ d = 0$ On note souvent le schema d'un complexe:

$E_1 \xrightarrow{d} E_2 \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} E_n$

La notion de complexe est une notion très génerale et le point de depart d'une théorie mathématique appéllé algèbre homologique.

Théorème et définition

Il existe une unique application d appellée dérivation exterieure et qui prolonge la dérivation naturelle aux formes différentielles. vérifiant:

1) La restriction de d à $\Omega_1(U)$ est une application linéaire.
2) $\forall\ \alpha \in \Omega_p(U)$, $\forall\ \beta \in \Omega_q(U)$, $d\alpha \wedge \beta = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p\ \alpha \wedge d\beta$
3) $d \circ d = 0$

Démonstration

1) Prouvons l'unicité et posons:

$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1,...,i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ une p-forme Alors:

$d\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} d(\omega_{i_1,...,i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p})$

en utilisant l'axiome 1 de linéarité soit:

d $\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} d(\omega_{i_1,...,i_p}(x)) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$

$+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1,...,i_p}(x) d(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p})$

Le dernier terme est nulle par itération à cause de $d^2 = 0$ et les termes $d(\omega_{i_1,...,i_p}(x)) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ sont des différentielle au sens usuelle. d'ou l'unicité de l'ecriture du premier terme (decomposittion dans une base).

On a prouver que si d existe, elle est unique:

2) Existence:

Il suffit de regarder ce qui se passe pour des monômes posons:

$\omega(x) = g(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge ... \wedge dx_{i_p}$ une p-forme.

$\eta(x) = h(x) dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge ... \wedge dx_{j_q}$ une q-forme:

$d(\omega(x) \wedge \eta(x)) = d(g(x)h(x)\ (dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge (dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q})) =$

$(\frac{\partial}{\partial x_1}(gh) dx_1 + ... + (\frac{\partial}{\partial x_n}(gh) dx_n) \wedge (dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge (dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q})$

$= \Sigma_k (\frac{\partial g}{\partial x_k} h(dx_k \wedge\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}) + \Sigma_k (\frac{\partial h}{\partial x_k} g(dx_k \wedge\ dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}) =$

$\Sigma_k(\frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k \wedge\ (dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge \eta + \Sigma_k \frac{\partial h}{\partial x_k}(dx_k \wedge \omega \wedge (dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}))$

Attention : maintenant faire passer dx_k a travers ω d'où le (-1)^k :

$\Sigma_k(\frac{\partial g}{\partial x_k} dx_k \wedge\ (dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) \wedge \eta + \Sigma_k(-1)^p(\omega \wedge \frac{\partial h}{\partial x_k} dx_k \wedge (dx_{j_1} \wedge ... \wedge dx_{j_q}))$

Ce qui prouve la deuxème assertion. La troisième est bien sur une consequence du lemme de schwarz.

2.2 Complexe de De Rham (suite)

On a maintenant tout ce qu'il faut pour définir un complexe :

-Une suite d'espaces vectoriels: les $\Omega_p(U)$

-Une derivation: La dérivation exterieure définie plus haut.

En dimension n le complexe de De Rham se note:

$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \Omega_n(U) \xrightarrow{d} 0$

Exemples

-Complexe de De Rham d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ avec les notations "consacrées":

$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{Grad} \Omega_1(U) \xrightarrow{Rot} \Omega_2(U) \longrightarrow 0$

-Complexe de De Rham d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ avec les notations "consacrées":

$\Omega_0(U) = \mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{Grad} \Omega_1(U) \xrightarrow{Rot} \Omega_2(U) \xrightarrow{Div} \Omega_3(U) \longrightarrow 0$

2.3 Formes exactes, formes fermées cas général

On peut donc donner une définition générale pour les formes exactes et les formes fermées:

Définition

-Une forme de degré k est exacte si elle est dans l'image par $d = d_{k-1}$ de l'espace vectoriel des formes de degré $k-1$
-Une forme de degré k est fermée si elle appartient au noyau de l'application linéaire $d = d_k$ de l'espace vectoriel des formes de degré k dans l'espace vectoriel des formes de degré $k+1$

Remarque

Dire que pour un ouvert U, toute forme fermée de degré k est exacte, c'est dire que $Kerd \subset Imd$, comme par ailleurs $Imd \subset Kerd$ (par $d^2 = 0$);on déduit:

$Kerd = Imd$.

De manière générale quand un complexe vérifie cette propriété on dit qu'il sagit d'un complexe exacte. Le défaut d'exactitude d'un complexe est mesuré par la non vacuité des espaces vectoriels quotients:

$H_k(U) = Ker(d_k)/Im(d_{k-1})$

Les groupes $H_k(U)$ mesure l'existence de "topologie non triviale" (dans le cas des p-formes de cohomologie).

-On montre par exemple, que sur un ouvert étoilé $dimH_k(U) = 1$ Ce qui traduit l'existence d'une seule composante connexe et les groupes de cohomologie supérieurs sont tous nuls traduisant la retraction de l'ouvert sur un point.

-On montre par exemple que sur l' ouvert $\mathbb{R}^2$ - $(0,0)$ le premier groupe de cohomologie est de dimension 1 ce qui traduit l'existence d'un trou.

2.4 Epilogue

Pour être tout à fait complet disons que l'on peut construire une théorie duale: l'homologie singulière. et cette dualité rend hommage a Poincaré c'est la formule de stoke ou dualité de Poincaré:

l'intégrale d'une forme différentielle ω évaluée sur le bord d'un domaine compacte D est l'integrale de $d\omega$ évaluée a l'intérieur:

$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$