CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle Cours 5: Algèbre linéaire: dualité, formes multilinéaires

Jeudi 2 novembre 2006

1 Dualité

1.1 Définition espace dual

Soit E un espace vectoriel sur un corps quelconque (on choisira toujours $K = \mathbb{R}$).On appelle forme linéaire sur E une application linéaire de E dans K. Cet ensemble est noté $\mathcal{L}(E, K)$ ou E^* et c'est l'espace dual de E.

Notations

Il est d'usage de noter φ ou x^* un élément de l'espace dual. Attention quand même, cette dernière notation est trompeuse car elle porte à penser qu'il existe une association entre un élement de E et un élement du dual. Cela est cependant vrai en dimension finie.

1.2 Définition: crochet de dualité

Si x est un vecteur de E, φ une forme linéaire sur E^*, il est d'usage de noter le reel $\varphi(x)$ par $< \varphi, x >$; on parle de crochet de dualité. (Cette notation a l'avantage de montrer le role symétrique (en dimension fini) joué par x et $\varphi = x^*$). Le crochet de dualité défini une forme bilinéaire sur $E \times E^*$ (exercice).

1.3 Transposition

Soit E, F deux espaces vectoriels et f une application de E vers F, l'application de F^* vers E^* qui a φ associe $\varphi \circ f$ s'appelle transposé (ou pull back en anglais) de f.

La définition et le théorème qui suivent sont donné pour souligner qu'en dimension finie à partir des deux objets E et E^* on ne crée rien de nouveau! si on dualise E^* on obtient E^{**} (bidual) mais à isomorphisme (canonique) près ce n'est rien d'autre que E.

1.4 Définition

Considérons l'application de E^* dans K notée $\widetilde{x}$ qui a φ associe $\varphi(x)$.Cette application est une forme linéaire sur E^* et appartient donc au (bi)-dual de E noté E^{**}.

Théorème

On note J l'application qui à $x \in E$ associe $\widetilde{x} \in E^{**}$. J est bijective en dimension finie.

Démonstration

1) Prouvons que J est linéaire:

$J(\lambda x + \mu y) = \widetilde{\lambda x + \mu y}$

Mais $\forall \varphi \in E^*$, $\widetilde{\lambda x + \mu y}(\varphi) = <\varphi, \lambda x + \mu y> = \lambda <\varphi, x> + \mu <\varphi, y> = (\lambda \widetilde{x} + \mu \widetilde{y})(\varphi)$

Donc J est bien linéaire.

Montrons que J est injective, Il est suffisant de montrer:

$J(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou que $x \neq 0 \Rightarrow J(x) \neq 0$.

Si E est de dimension finie, Il existe une base $e_1, ..., e_n$ de E

Exercice : montrer que l'ensemble des $e_1^*, ..., e_n^*$ de E^* définie par:

$< e_i^*, e_j > = \delta_{i,j}$ forme une base de E^*

Posons $e_1 = x$, Alors :

$< J(x), e_1^* > = < J(x), x^* > = < x^*, x >= 1$

Et on déduit $J(x) \neq 0$.

Applications à l'analyse

Ces résultats algébrique correspondent aux situations suivante:

1) Calcul différentiel: un élément e_i de E est le vecteur "accroissement" unité au point x_0 : $(0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$ de $\mathbb{R}^n$ (le 1 est à la i-ème position) et l'élément e_i^* de E^* la 1-forme différentielle aussi évaluée en x_0 dx_i de $\mathbb{R}^{n*}$.

2) Géométrie différentielle: un élément e_i de E est le vecteur "tangent" unité du fibré tangent : ∂_i au dessus d'un point de la variété et l'élément e_i^* de E^* la 1-forme différentielle dx_i de l'espace cotangent au dessus du même point de la variété.

2 Formes multilinéaires et multilinéaires alternés

On consière le produit cartésien de p espaces vectoriels, sur un corps K. Pour les applications en vue le corps considèré est le corps des nombres réels.

2.1 Définition

Une application f de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ dans K est multilinéaire (ici p-linéaire) si et seulement si chaque application partielle $f_i : E_i \longrightarrow K$ est linéaire. L'ensemble des p-formes linéaires est noté: $\mathcal{L}_p(E_1, E_2, ..., E_p, K)$. Si les E_i sont identiques c'est plus simplement: $\mathcal{L}_p(E, K)$.

L'ensemble des formes multilinéaires altérnées se scinde en deux sous ensembles importants: les formes multilinéaires symétriques et les formes multilinéaires alternées. La première classe fait partie des tenseurs pairs ou symétriques, la seconde des tenseurs impairs ou antisymétriques.

Forme p-linéaire symétriques

Une forme p-linéaire est symétrique, si pour toute permutation σ de $(1, ..., p)$ et tout n-uplet $(x_1, ..., x_p)$

$f(x_1, ..., x_p) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$

Forme p-linéaire antisymétriques

Une forme p-linéaire est antisymétrique, si pour tout n-uplet $(x_1, ..., x_p)$

$f(x_1, ..., x_p)$ =0 dès que deux indices sont identiques

Cela revient au meme de dire que pour toute transposition τ de deux indices,

$f(x_{\tau(1)}, ..., x_{\tau(p)}) =$ - $f(x_1, ..., x_p)$

On dit aussi que la forme est alternée. On note $\Lambda_p^*(E)$ cet ensemble.

3 Eléments d'algèbre exterieur

Toutes permutations d'un ensemble à n éléments se décompose en produit de transpositions. on peut alors définir la signature de la permutation notée $\varepsilon(\sigma)$ d'après ce qui prèc'de toute formes alternée peut s'ecrire:

$f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, ..., x_p)$

On a un procédé "canonique" pour fabriquer des formes altérnées à partir des p- formes; il en est de même pour les formes symétriques:

3.1 Antisymétrisation d'une p- forme

Soit f une p-forme, on obtient une forme altérnée $\overline{f}$ en posant:

$\overline{f}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$

Exemples

-Soit f de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\overline{f} = \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x))$ est antisymétrique

3.2 Produit tensoriel et produit exterieur

dans ce qui suit, on considère f une forme p-linéaire φ, une forme q-linéaire ψ; on donne les définitions suivantes:

Définition

On appélle produit tensoriel de φ et ψ noté $\varphi\otimes\psi$ la $p+q$- forme linéaire définie par:

$\varphi\otimes\psi(x_1, ..., x_{p+q}) = \varphi(x_1, ..., x_p)\psi(x_{p+1}, ..., x_{p+q})$

On définit ainsi une application bilinéaire.

On aimerais définir un produit (tensoriel) antisymétrique sur les formes multilinéaires alternées:

l'antisymétrisée de φ est définie par:

$\overline{\varphi}(x_1, ..., x_p) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in S_p}\varepsilon(\sigma)\varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})$

l'antisymétrisée de ψ est définie par:

$\overline{\psi}(x_{p+1}, ..., x_{p+q}) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q}\varepsilon(\sigma)\psi(x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)})$

l'antisymétrisée de $\varphi\otimes\psi$ est définie par:

$\overline{\varphi\otimes\psi}(x_1, ..., x_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\varepsilon(\sigma)\varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})\psi(x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)})$

Notations et théorème

Notons $S_{p,q}$ l'ensemble des permutations de S_{p+q} verifiant:

$\sigma(1) < ... < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < ... < \sigma(p+q)$

Notons α une permutation de S_{p+q} laissant invariant les p-derniers éléments.

Notons β une permutation de S_{p+q} laissant invariant les q-premiers éléments.

Théorème

Toute permutation s de S_{p+q} peut s'ecrire: $s = \sigma \circ \alpha \circ \beta$ avec les notations précédentes.

On a maintenant tous les outils nécessaires à la définition du produit exterieur:

Théorème et définition

Soit φ, ψ deux formes antisymétriques, la forme bilinéaire ci-dessous :

$\varphi \wedge \psi(x_1, ...x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \varepsilon(\sigma)\varphi(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(p)})\psi(x_{\sigma(p+1)}, ..., x_{\sigma(p+q)})$

est antisymétrique.

On l'appelle produit extérieur des formes φ et ψ; on a:

$\varphi \wedge \psi = \frac{(p+q)!}{p!q!} \overline{\varphi \otimes \psi}$

La demonstration donnée ci-dessous sera commentée en exercice (TD) :

Démonstration

on a:

$(p+q)! \overline{\varphi \otimes \psi}(x_1, ..., x_{p+q}) = \sum_{s \in S_{p+q}} \varepsilon(s)\varphi(x_{s(1)}, ..., x_{s(p)})\psi(x_{s(p+1)}, ..., x_{s(p+q)})$

que l'on peut réecrire en explicitant la transformation s :

$\sum_{\sigma,\alpha,\beta} \varepsilon(\sigma\alpha\beta))\varphi(x_{\sigma\alpha\beta(1)},...,x_{\sigma\alpha\beta(p)})\psi(x_{\sigma\alpha\beta(p+1)},...,x_{\sigma\alpha\beta(p+q)}) =$

$\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \sum_\alpha \varepsilon(\alpha) \sum_\beta \varepsilon(\beta)\varphi(x_{\sigma\alpha\beta(1)},...,x_{\sigma\alpha\beta(p)})\psi(x_{\sigma\alpha\beta(p+1)},...,x_{\sigma\alpha\beta(p+q)}) =$

$\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \sum_\alpha \varepsilon(\alpha)\varphi(x_{\sigma\alpha\beta(1)},...,x_{\sigma\alpha\beta(p)}) \sum_\beta \varepsilon(\beta)\psi(x_{\sigma\alpha\beta(p+1)},...,x_{\sigma\alpha\beta(p+q)}) =$

Mais, β laisse constant les premiers termes et n'agit que sur les q derniers la formule ci dessus devient:

$\sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \sum_\alpha \varepsilon(\alpha)\varphi(x_{\sigma\alpha(1)},...,x_{\sigma\alpha(p)})\ q!\ \psi(x_{\sigma\alpha(p+1)},...,x_{\sigma\alpha(p+q)})$

-<u>Attention</u> : il n'y a pas de barre sur ψ qui est déjà antisymétrique. Cette fois ci, c'est α qui laisse constant les derniers termes et ne touche pas aux p premiers , et encore une fois comme φ antisymétrique la formule dévient:

$\sum_{\sigma\in S_{p,q}} \varepsilon(\sigma)\ p!\ \varphi(x_{\sigma(1)},...,x_p)\ q!\ \psi(x_{\sigma(p+1)},...,x_{\sigma(p+q)}) =$

$p!\ q! \sum_{\sigma\in S_{p,q}} \varepsilon(\sigma)\ \varphi(x_{\sigma(1)},...,x_p)\ \psi(x_{\sigma(p+1)},...,x_{\sigma(p+q)})$

Qui est bien la formule voulue.

Propriétés du produit extérieur

On a les propríetés suivantes:

1. Le produit extérieur est une forme bilinéaire.
2. si $\varphi \in\Lambda_p^*(E)$, $\psi \in\Lambda_q^*(E)$, $\varphi\wedge\psi = (-1)^{pq}\psi\wedge\varphi$
3. Le produit extérieur est associatif.

Indications

Seul le deuxième point est délicat, il faut faire intervenir la permutation τ et determiner sa signature:

$(1, 2, ..., p + q) \rightarrow (p + 1, p + 2, ..., p + q, 1, 2, ..., p)$.

Cette permutation τ est le produit des permutations ci-dessous:

$(1, 2, ..., p + q) \to (2, 3, ..., p + q, 1)$
$(2, 3, ..., p + q, 1) \to (3, 4, ..., p + q, 1, 2)$
...
$(p, p + 1, ..., p + q, 1, 2, ..., p - 1) \to (p + 1, p + 2, ..., p + q, 1, 2, ..., p)$.

Chacune de ces permutations est un cycle de longueur $p + q$; c'est donc le produit de $p + q - 1$ transpositions: cela donne au total: $(p + q - 1)p$ transpositions et la parité de ce nombre est celle de pq .

D'où le $(-1)^{pq}$ de la formule, signature de la permutation