CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle Cours 3:
Calcul differentiel 1

Jeudi 19 octobre 2006

1 Introduction, cas des fonctions numériques d'une variable

1.1 Définition

On a étudié aux chapitres précedent la notion de continuité. une fonction numérique peut être partout continue sans pour autant être différentiable. On dira qu'une fonction est différentiable ou dérivable en un point x_0 si au voisinage de ce point, elle est "proche" d'une application linéaire soit mathématiquement:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + A.h + h\varepsilon(h)$ (*)

$L_{x_0}(h) = A.h(= df_{x_0}(h))$

est ici une fonction linéaire appellée différentielle au point x_0 et $A = f'(x_0)$ est le nombre dérivé au point x_0

1.2 Notations différentielles

Comme introduction au calcul tensoriel, nous allons introduire les notations différentielles: Si on note de manière abusive x l'application identité de $\mathbb{R}$ dans lui même, (*) donne:

$x(x_0 + h) = x(x_0) + h + h.0$

La différentielle de "x" est:

$dx_{x_0}(h) = dx(h) = h$

On découvre le rôle joué par la dualité $E \leftrightarrow E^*$: la base de $\mathbb{R}$ est le vecteur "1" en dualité avec dx:

$< dx, 1 >= dx(1) = 1$

comme d'autre part,

$df_{x_0}(h) = f'(x_0)dx(h)$

On dit que df_{x_0} est une 1 forme différentielle définie sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ En fait en analyse la différentielle,n'est interessante que "localement dans un voisinage de x_0. aussi on parle de 1-forme différentielle définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, et on note:

$df_{x_0} \in \Omega_1(U)$

La notion de forme différentielle est très importante en géometrie différentielle et permet de construire l'analyse tensorielle antisymetrique, par ailleurs en topologie algébrique les formes différentielles permettent de batir les espaces de cohomologie (de De Rham). Ces espaces permettent de comprendre mieux la topologie des variétés différentielles et sont définis dans le cadre de la topologie algébrique.

Remarque

Dans l'écriture, $df_{x_0}(h) = f'(x_0)dx(h) = f'(x_0).h$

La différentielle peut être vue comme un produit scalaire du vecteur gradient, ici le nombre dérivé $f'(x_0)$ par l'accroissement h:

$df_{x_0}(h) = \nabla_{x_0}(f).h$

cette opération n'est autre que l'identification en algèbre linéaire entre la forme bilinéaire crochet de dualité et le produit scalaire.

2 Fonctions numériques à plusieurs variables

On dit que f: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $x_0 = (x_1^0, ...x_n^0)$ si:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + L_{x_0}(h) + h\varepsilon(h)$ (*)

Ici, h est le vecteur $(h_1, ...h_n)$;

$L_{x_0}(h) = a_1.h_1 + ...a_n.h_n (= df_{x_0}(h))$

est ici une application linéaire de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ appellée différentielle au point x_0 et l'existence des a_i assure celle des dérivées partielles. De même, en appelant par abus de langage x_i l'application projection sur la $i - ème$ coordonnée on remarque que:

$dx_i(h_1, ..., h_n) = h_i$

Donc en notant e_i le vecteur $(0, ...1, 0...)$ où le 1 porte sur la $i_{ème}$ coordonnée in retrouve comme en algèbre linéaire:

$< dx_i, e_j >= \delta_i^j$

Remarque, vecteur gradient

On a la même remarque qu'au dessus:

Dans l'écriture, $df_{x_0}(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1(h) + ...\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n(h)$

La différentielle peut être vue comme un produit scalaire du vecteur gradient, ici le vecteur $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$ noté: $\nabla_{x_0}(f)$ par le vecteur accroissement h:

$df_{x_0}(h) = \nabla_{x_0}(f).h$

En physique mathématique, on a l'habitude de jongler avec toutes ces différentes notations. Il faut donc y être initié.

Enfin étudions le cas plus général des applications différentiables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$:

3 Applications différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ s'ecrit:

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ...f_p(x))$

On dira donc qu'une telle application est différentiable si chaque applications partielle l'est:

$\forall i = 1...p,\ f_i(x_0 + h) = f_i(x_0) + L_{i_{x_0}}(h) + h\varepsilon(h)$ (*)

Chaque $L_{i_{x_0}}(h)$ est la forme linéaire:

$L_{i_{x_0}}(h) = df_{ix_0}(h) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_0)dx_1(h) + ...\frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x_0)dx_n(h)$

et forme une ligne de la matrice Jacobienne de l'application linéaire que représente la différentielle:

$$J(f)_{x_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ : & : & & : \\ : & : & & : \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(x_0) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

et

$$df_{x_0}(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Définition

On dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si les dérivées partielles existent et sont continues sur U.

On peut montrer que pour que f soit différentiable sur U , il suffit que les dérivées partielles existent et soient continues. d'autre part, on peut composer les fonctions différentiables on a la proposition:

Proposition

Soit f une fonction de $U \subset \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ différentiable en x_0 et g une fonction d'un voisinage $V \subset \mathbb{R}^q$ de $f(x_0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, différentiable en $f(x_0)$. On a:

$J(g \circ f)_{x_0} = J(g)_{f(x_0)} J(f)_{x_0}$

En particulier si f bijective,

$df^{-1}_{f(x_0)} = df^{-1}_{x_0}$ soit matriciellement:

$J(f^{-1})_{f(x_0)} = J(f)^{-1}_{x_0}$

Dérivées d'ordre supérieur: Théorème de Schwarz

Si les dérivées partielles:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

existent et sont continues sur U, elles sont égales sur U:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

la fonction f est alors dite de classe $\mathcal{C}^2$.

On définie de même l 'espace $\mathcal{C}^k$.