CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle Cours 2: Espaces vectoriels normés, continuité

Jeudi 12 octobre 2006

1 Espaces vectoriels normés

Soit un E un espace vectoriel sur un corps K.
Une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ verifiant:
$\forall x \in E \times E \ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
$\forall (\lambda, x) \in K \times E \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
$\forall (x, y) \in E^2 \ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Exemples

-Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$; en notant $(x_1, x_2, ..; x_n)$ les coordonnées d'un vecteur quelconque de cet espace,$\| x \|_p = (| x_1 |^p + ... + | x_n |^p)^{\frac{1}{p}}$ et $\| x \|_\infty = Sup_{1 \leq i \leq n} | x_i |$ définissent des normes. Le cas p=2 est très particulier, on retrouve la norme euclidienne provenant du produit scalaire classique.

-Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions numériques continues sur l'intervalle $[a, b]$

$\| f \|_2 = (\int_a^b | f(x) | dx)^{\frac{1}{2}}$

$\| f \|_\infty = Sup_{x \in [a,b]} | f(x) |$

sont des normes sur l'ensemble $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Remarque: $\| f \|_2 = (\int_a^b \mid f(x) \mid dx)^{\frac{1}{2}}$ provient aussi d'un produit scalaire. Cette norme a de nombreuses applications en physique. Elle permet de modéliser l'energie d'un signal entre autre.

Remarque

Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un cas particulier d'epace métrique; on pose en effet si (E, N) est un e.v.n en posant $d(x, y) = N(x - y)$ on vérifie que d est une distance. En revanche la réciproque est fausse. Par exemple, la distance lexicographique entre les mots d'un langages n'est liée a aucune structure d'espace vectoriel.

1.1 Equivalence de normes

D'après la remarque précédente, On a une notion d'équivalence de normes, heritée de l'équivalence des distances:
On dit que deux normes sont équivalentes quand:

$\exists \alpha, \beta$ tel que $\forall x \in E$ $\alpha N_1(x) < N_2(x) < \beta N_1(x)$.

Théorème

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

La consequence pratique de ce théorème intervient quand on fait de l'analyse sur $\mathbb{R}^n$;c'est le cas qui nous importe pour ce cours. Par contre en analyse fonctionnelle où l'on manipule des espaces fonctionnels de dimensions infinies ce resultat ne subsiste pas et le choix d'une norme adaptée au problème à resoudre est très important.

1.2 Produit scalaire, espace euclidien

Le cas $p = 2$ vu precèdement permet vraiment de faire de la géometrie euclidienne car l'orthogonalité peut être modélisée:

Un produit scalaire φ sur E est une forme bilinéaire symétrique (2- tenseur symétrique comme on le verra) définie et positive:

$\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
$\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$
$\varphi(\lambda x,y) = \lambda\varphi(x,y)$
$\varphi(x,x) \geq 0$
$\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Exemple, remarque

-Sur $\mathbb{R}^n$: $\varphi(x,y) = x_1y_1 + ...x_ny_n$ si $x = (x_1,...x_n)$ et $y = (y_1,...y_n)$ est un produit scalaire

-Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ $\varphi(x,y) = \int_a^b f(x)g(x)dx)$ est un produit scalaire.

En physique on a coutume de nommer produit scalaire :

$< x,y >= c^2.tt' - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$

même si ce réel n'est pas défini positif. Dire que $\varphi(x,x)$ est nul c'est dire que l'on se déplace à la vitesse de la lumière.

2 Limite, continuité

-Soit $(\mathbf{X}_1, \mathcal{O}_1)$, $(\mathbf{X}_2, \mathcal{O}_2)$ deux espaces topologiques. f une application de $\mathbf{X}_1$ vers $\mathbf{X}_2$. On dit que f admet une limite l quand x tend vers a lorsque:

$\forall V \in \mathcal{V}(l)\ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ /\ f(U) \subset V$

-Si f est définie au point a et que $l = f(a)$,on dit que f est continue au point a -Remarque: à partir de cette définition générale; on retrouve toutes les définitions classiques de limite et continuité.

2.1 application de la définition générale

1)$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = \mathbb{R}$ et les ouverts engéndrés par les intervalles ouverts.

modelisons $lim_{x\to a}f(x) = l$ (*):

Un voisinage de l contient un intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$
Un voisinage de a contient un intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$

(*) devient:
$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ f(]a-\alpha, a+\alpha[) \subset]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

Ou encore:
$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$

2)modelisons la limite d'une suite: $lim_{n \to +\infty} f(n) = l$ (*):

$V_n = \{n+1, n+2, ...\}$ forme une famille d'ouverts donc:

Un voisinage de l contient un intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$
Un voisinage de $+\infty$ contient un $V_N = \{N+1, N+2, ...\}$

(*) devient:
$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \ f(\{N+1, N+2, ...\}) \subset]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$

Ou encore:
$\forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \ n > N \Rightarrow |f(n)-l| < \varepsilon$

en posant $u_n = f(n)$ On retrouve la définition connue.

2.2 Continuité d'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Rappelons que dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes:

On choisit donc N_1 appropriée a la source, N_2 au but et:

On dit que f admet l pour limite quand x tend vers x_0 quand:

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ N_1(x-x_0) < \alpha \Rightarrow N_2(f(x)-l) < \varepsilon$

On dit que f est continue en x_0 quand: $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$