CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle Cours 14: Application des tenseurs a la relativité générale

Jeudi 18 Janvier 2007

1 Introduction

Nous allons dans ce bref exposé donner une application de l'analyse tensorielle à la relativité générale et montrer que le langage des tenseurs permet de bien généraliser la théorie statique de la gravitation (Equation de poisson génerée par une masse "statique") élaborée par Newton. Ce travail à été entrepris par Einstein. Maxwell avait lui trouver un cadre permettant de généraliser l'éléctrostatique (Equation de Poisson pour des charges "statique". Equations de Maxwell, fluide électrostatique. Le parallèle est saisissant (les particules massiques sont considèrees comme un fluide en mouvement) mais l'équation obtenue est plus difficile à manipuler que les équations de Maxwell.

2 Théories statiques et dynamiques

2.1 Théories statiques de Newton et Coulomb

On est frappé dès la fin des années de l'enseignement secondaire et dans les premières années du cursus universitaire par l'analogie entre la théorie de la gravitation et l'électostatique. Dans les deux théories, le facteur d'attraction de deux masses (cas de la gravitée) ou de deux charges de signe opposées (cas de l'eléctrostatique) est inversement proportionnel au carré des distances de ces deux corps. Ainsi, une particule massique ou éléctrique crée un champ de gravitation sensé aspirer les particules massiques environnantes si ψ désigne le potentiel de gravitation, alors on a l'équation de Poisson:

$\Delta\psi = 4\pi G\rho$

ρ désigne ici la densité de masse.

Si maintenant ϕ désigne le potentiel éléctrostatique, alors on a l'équation de Poisson:

$\Delta\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

ρ désigne ici la densité de charge.

Maxwell est un des premiers physiciens à avoir unifier des théories physiques. En considèrant les charges tantôt en mouvement tantôt au repos dans leurs propre réféntiel, il a réuni l'electricité et le magnétisme.

2.2 Théories dynamiques de Maxwell et Einstein

On montre dans le cadre de la relativité restreinte que le potentiel scalaire ϕ peut être plus généralement substitué a un potentiel vecteur quand on remplace les charges statiques par des courants on obtient l'équation de Maxwell avec sources:

$\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 J^\mu$

Ce système d'équations aux dérivées partielles décrit l'éléctrodynamique.

On peut dire que Einstein a fait quelque chose d'analogue dans le cadre de la gravitation. Les équations trouvées par Einstein rendent "dynamique" la loi de la gravitation élaboré par Newton. Il est a noté que dans la formule ci dessous le membre de gauche dérive un terme de courbure :la courbure de la connexion associé champ éléctromagnétique. Tout ceci est récurrent en th'eorie des champs. on a une équation dont le membre de gauche est associé à la courbure (donc a de la géométrie) et un membre de droite associé au contenu materiel: masses, charges. Les masses et les charges modifient localement la géométrie de leur environnement. Dans le cadre de gravitation, Einstein est arrivé au mêmes conclusions: en contractant deux fois l'identité de Bianchi il débouche sur le tenseur "d'Einstein" comprenant deux termes: tenseur de Ricci et courbure scalaire. Il postule alors que la matière (statique ou non)(tenseur énergie-impulsion) est la cause de cette courbure.

$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \chi T^{\mu\nu}$

Dans cette équation le membre de gauche est souvent noté $G^{\mu\nu}$ et c'est le tenseur d'Einstein.

3 Géométrie riemannienne et relativité

L'espace de configurations de la relativité générale à quatres dimensions; trois dimensions d'espace, une dimension de temps... Le seul problème c'est que la théorie des espaces riemanniens n'est pas très adapté: (mais on s'y fait!). La métrique associé à l'espace plat n'est pas $dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ mais $cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ donc n'est pas définie positive. Une autre remarque et non des moindre, c'est que pour la première fois le temps n'est plus universel, qu'il est intimement lié aux variables d'espace, que l'on ne parle plus uniquement de géométrie de l'espace mais de géométrie de l'espace temps.

3.1 Géométrie de l'espace temps

L'espace temps sera donc pour nous une vari'eté pseudo-riémannienne de dimension 4 muni de la m'etrique que les physiciens note souvent à partir de l'elément de longueur infinitesimale "ds^2":
On a dans le cas d'une métrique plate (Espace vide de champs de gravitation:): $ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

pour la commodité du calcul tensoriel on pose $x_0 = c.t, x = x_1, y = x_2, z = x_3$ et $ds^2 = \eta_{ij} dx^i \otimes dx^j$

On parle alors de métrique de Minkowski. c'est le cadre de la relativité restreinte. En presence de champs (cas de la R.G) le "ds^2 s'ecrit:
$ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$

Le ds sera souvent noté $d\tau$ et désigne le temps propre de la particule dans le champs de gravitation (cela correspond en mathématiques à l'abcisse curviligne.)

3.2 Identité de Bianchi et tenseur de Riemann

Le membre de droite de l'équation d'Einstein comme nous l'avons dit désigne le tenseur d'énergie impulsion.Un des principe de physique requis est sa conservation: l'energie et la matiere est conservée dans l'univers (par définition "le tout"). Cela se traduit par la nullité de la dérivé covariante du tenseur Energie impulsion:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$$

Il nous faudrais donc un resultat analogue pour le membre de gauche pour le tenseur de courbure. Einstein a tatonner longtenps de 1912 a 1915 pour trouver la solution tentant vainement de généraliser l'équation de Poisson dans une théorie scalaire. Ce n'est que revenu vers l'analyse tensorielle (théories covariantes) qu'il trouve enfin la solution. On dispose en effet en géométrie riemanienne de la deuxième identitée de Bianchi; en contractant deux fois par la métrique, on trouve que la dérivée du tenseur d'Einstein ne comportant que des termes lié a la courbure est nulle;la deuxième identitée de Bianchi est donnée par :

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

On contracte deux fois par la métrique:

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda}(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0$$

soit:

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0$$

Donc:

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla_\rho R$$

$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\nabla^\mu g_{\mu\rho} R$

En reindexant on decouvre le tenseur d'Einstein et du même coup que sa dérivée covariante est nulle:

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$

On a enfin un resultat cohérent a savoir:

(conservation de l'energie impulsion) $\Leftrightarrow$ (conservation de la "courbure")

Il ne nous reste pous qu'a montrer que cette équation de champ dynamique prolonge l'équation de Poisson. Montrons donc que dans l'hypothèse de champs faible et de mouvements lents on retrouve l'équation de la dynamique (loi de Newton) ainsi que l'équation de Poisson.

4 Approximation Newtonnienne

On se place maintenant dans les hypothèses suivantes (Limite des champs faibles en mécanique classique):

-les vitesses sont faibles devant c:

$\mid \frac{dx^k}{dt} \mid \ll c \ (k \geq 1)$

-la métrique est quasi-minkowskienne:

$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, $\mid h_{\alpha\beta} \mid \ll 1$ et $\mid h_{\alpha\beta} \mid \ll \mid \eta_{\alpha\beta} \mid$

-Champ stationnaire:

$\partial_0 h_{\alpha\beta} = 0$

On va dans ce premier paragraphe, écrire l'équation des géodésiques dans un champ faible et retrouver la loi de la dynamique de Newton:

4.1 Equation de la dynamique

L'équation des géodésique dans la variété d'espace temps est donnée par:

$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{i,j}\frac{dx^{i)}}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0$

Dans cette expression, ds est le temps propre noté aussi $d\tau$ avec $d\tau^2$ $=cdt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$

On rappelle que les $\Gamma^k_{i,j}$ sont données en fonction de la métrique par:

$\Gamma^k_{i,j} = \frac{1}{2}g^{k,h}(\frac{\partial g_{j,h}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{i,h}}{\partial x_j}$ - $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial x_h})$

Dans l'hypothèse de la limite des champs faibles cette expression devient ($ds \simeq c.dt$):

$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma^k_{0,0}\frac{dx^0}{ds}\frac{dx^0}{ds} = 0$

avec: $\Gamma^k_{0,0}$ =- $\frac{1}{2}g^{k,h}\frac{\partial g_{0,0}}{\partial x_h}$

qui s'écrit aussi:

$\Gamma^k_{0,0}$ =- $\frac{1}{2}(\eta^{k,h} + h^{k,h})(\frac{\partial(\eta_{0,0}+h_{0,0})}{\partial x^h})$ =- $\frac{1}{2}\eta^{k,h}\frac{\partial h^{0,0}}{\partial x^h}$

L'équation des géodésique se réecrit:

$\frac{d^2x^k}{ds^2} = \frac{1}{2}\eta^{k,h}\frac{\partial h_{0,0}}{\partial x^h}(\frac{dx^0}{ds})^2$

Mais $\frac{dx^0}{ds} = \frac{d(c.t)}{ds} = 1$

donc $\frac{d^2x^0}{ds^2}$ =0 (composante temporelle) et si $k \geq 1$:

$\frac{d^2x^k}{dt^2} =-\frac{c^2}{2}\eta^{k,h}\frac{\partial h_{0,0}}{\partial x^h}$

soit:

$\frac{d^2x^k}{dt^2} =-\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{0,0}}{\partial x^h} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial(\eta_{0,0}+h_{0,0})}{\partial x^h} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{0,0}}{\partial x^h} = -\frac{\partial \psi}{\partial x^h}$

On en déduit: $\psi = \frac{c^2}{2} g_{0,0} + cste$

C'est à dire:

$g_{0,0} = \frac{2\psi}{c^2} + cste$

Et quand l'espace est plat, $\psi = 0$, $g_{0,0} = \eta_{0,0} = 1$ Alors:

$g_{0,0} = \frac{2\psi}{c^2} + 1$

On a ainsi retrouver la loi de Newton.

4.2 Approximation par l'équation de Poisson

La même méthode permet de déduire l'équation de Poisson de l'équation dynamique de la gravitation.

Le secret: ici le fluide gravitationnel est "au repos": ainsi le tenseur d'energie-impulsion est simplement un gaz parfait de particules dont le centre de masse est au repos ce qui donne une densité de matière energie égale a $T_{00} = \rho c^2$ .Le tenseur énergie-impulsion "au repos" est donné sous forme matricielle par:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sa trace $T^{\alpha}{}_{\alpha}$ est donnée par:

$T^{\alpha}{}_{\alpha} = T_{00} = \rho c^2$.

On a vu que:$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \chi T_{\alpha\beta}$

Si on contracte cette dernière formule il vient:

$g^{\beta\gamma} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} g_{\alpha\beta} R = \chi g^{\beta\gamma} T_{\alpha\beta}$

En fait cela est reductible à:

$R^{\gamma}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\gamma}{}_{\alpha}R = \chi T^{\gamma}{}_{\alpha}$

En contractant α β il vient:

$R^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\alpha}R = \chi T^{\alpha}{}_{\alpha}$

Mais comme l'espace temps est de dimension 4 ($\delta^{\alpha}{}_{\alpha} = 4$):

$\chi T^{\alpha}{}_{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\alpha}R = -R$

L'equation d'Einstein peut s'écrire aussi:

$R_{\alpha\beta} = \chi(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T^{\alpha}{}_{\alpha})$

Dans la limite Newtonnienne:($T^{\alpha}{}_{\alpha} = T_{00}$)

T_{00} est le seul coefficient non nul l'équation d'Einstein se réduit à:

$R_{00} = \chi(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T_{00})$

soit ($g_{00} \simeq 1$) Alors:

$R_{00} = \frac{1}{2}\chi T_{00}$

Ecrivons le tenseur de Ricci pour le coefficient R_{00}:

$R_{00} = R^{i}{}_{0i0} = \frac{\partial\Gamma^{k}_{0,0}}{\partial x^{i}}(p) - \frac{\partial\Gamma^{k}_{i,0}}{\partial x^{0}}(p) + \Gamma^{i}_{i,s}(p)\Gamma^{s}_{0,0}(p) - \Gamma^{i}_{0,s}(p)\Gamma^{s}_{i,0}(p)$

Les deux derniers termes d'ordre supérieurs peuvent être supprimé et d'autre part la dérivé par rapport au temps est nulle; il reste donc:

$R_{00} = \partial_{i}(\frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_{0}g_{\lambda 0} + \partial_{0}g_{0\lambda} - \partial_{\lambda}g_{00})$

$R_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_{i}\partial_{j}g_{00}$

Dans la dernière formule la métrique étant diagonale en première approximation, seuls les termes diagonaux subsistent. Aussi la dérivée par rapport à la première variable est nulle on aboutit à l'équation:

$$\nabla^2 g_{00} = \chi T_{00}$$

C'est l'équation de Poisson en champ faible:

$$\frac{2}{c^2}\nabla^2\psi = \chi\rho c^2$$

Pour retrouver l'équation de Poisson de la mécanique de Newton il convient de poser :

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$$

Alors:

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho$$

Fin de l'histoire....