CNAM UE MVA 210 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle Cours 13: Initiation à la géométrie riemannienne 2

Jeudi 11 Janvier 2007

1 Introduction

Nous allons maintenant définir une notion importante en géométrie Riemannienne; la notion de courbure. La manière la plus naturelle pour l'introduire consiste à remarquer que si on déplace parallèlement un vecteur le long d'une boucle infinitésimale en partant d'un point p d'une variété , il ne "revient" pas a sa position initiale sauf s'il n'y à pas de courbure. Le tenseur de courbure admet deux contractions, la première donne le tenseur de Ricci, la seconde la courbure scalaire.

2 Définition de la courbure d'une connexion

Avant de donner une définition abstraite, nous allons montrer ce qui la motive dans le paragraphe suivant

2.1 Transport parallèle le long d'un circuit

On part à $t = 0$ du point p d'une variété. On considère deux champs de vecteurs non colinéaires $X(p)$, $Y(p)$ determinant chacun des courbes autoparallèles respectivement notées γ_X et γ_Y. On suppose en outre que $\gamma_X(0) = \gamma_Y(0) = p$, $\dot{\gamma}_X(0) = X(p)$ et $\dot{\gamma}_Y(0) = Y(p)$ On suppose en outre que l'on parcours la courbe γ_X sur un temps t et la courbe γ_Y sur un temps u. On a ainsi construit deux cotés de notre parallélogramme pour construire les deux autres cotés, on transporte parallèlement le vecteur $Y(p)$ le long de γ_X jusqu'a $\gamma_X(t)$ puis, si on note $Y(t) \in T_{\gamma_{X(t)}}M$ Ce vecteur définit à son tour une courbe autoparallèle $\delta_Y(0) = \gamma_X(t)$ et $\dot{\delta}_Y(0) = Y(t)$ en parcourant cette courbe sur le temps u jusqu'au point $\delta_Y(u)$, on décrit le troisième coté : $\gamma_X(t) \to \delta_Y(u)$ est parallèle au coté $p \to \gamma_Y(u)$. On transporte aussi le long de C_Y le vecteur $X(p)$ jusqu'à $\gamma_Y(u)$. On obtient le vecteur $X(u)$ qui définit une courbe autoparallèle. $\gamma_Y(u) \to \delta_X(t)$ est parallèle au coté $p \to \gamma_X(t)$. On va voir que les deux extremitées du parallélogramme coencident au premier ordre.

Au point p on a:

$\frac{d\gamma_X^i}{dt}(0) = X^i(p)$

$\frac{d\gamma_Y^i}{du}(0) = Y^i(p)$

Dans cette écriture $\gamma_X^i(\mathrm{t}) = x^i(\gamma_X(t))$, Alors au premier ordre en t:

$\gamma_X^i(t) = \gamma_X^i(0) + tX^i(p) + ...$

$\gamma_Y^i(u) = \gamma_Y^i(0) + tY^i(p) + ...$

Le champ de vecteurs le long de γ_X transporté parallèle de $Y(p)$, vérifie par définition:

$\frac{dx^i(\gamma_X(t))}{dt}(\partial_i Y^k(c(t)) + \Gamma_{i,j}^k(c(t))Y^j(c(t))) = 0$

Si on note $t \to Y(t)$ ce champ de vecteurs le long de γ_X on a:

$Y^k(t) = Y^k(0) + t\frac{dY^k}{dt}(0) + ...$

Comme la courbe est autoparallèle :

$\frac{dY^k}{dt}(0) = \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}(p)\frac{d\gamma_X^i}{dt}(0) = -\Gamma_{i,j}^k(p)Y^j(p)X^i(p)$

$Y^k(t) = Y^k(0) - t\Gamma_{i,j}^k(p)Y^j(p)X^i(p) + ...$

De même le transporté parallèle $X(u)$ de $X(p)$ le long de γ_Y vérifie :

$\frac{dx^i(\gamma_Y(t))}{dt}(\partial_i X^k(c(t)) + \Gamma_{i,j}^k(c(t))X^j(c(t))) = 0$

d'où:

$\frac{dX^k}{dt}(0) = \frac{\partial X^k}{\partial x^i}(p)\frac{d\gamma_Y^i}{dt}(0) = -\Gamma_{i,j}^k(p)X^j(p)Y^i(p)$

et alors:

$X^k(u) = X^k(0) - u\Gamma_{i,j}^k(p)X^j(p)Y^i(p) + ...$

En intervertissant i et j, il vient:

$X^k(u) = X^k(0) - u\Gamma_{j,i}^k(p)X^i(p)Y^j(p) + ...$

D'autre part pour δ_Y et δ_X on a:

$\delta_Y^k(u) = \delta_Y^k(0) + uY^k(t) + ...$

$\delta_X^k(t) = \delta_X^k(0) + tX^k(u) + ...$

et compte tenu de:

$\delta_Y^k(0) = \gamma_X^i(t)$ et $Y^k(t) = Y^k(0) - t\Gamma_{i,j}^k(p)Y^j(p)X^i(p) + ...$

Il vient au premier ordre:

$\delta_Y^k(u) = \gamma_X^k(0) + tX^k(p) + uY^k(p) - ut\Gamma_{i,j}^k(p)Y^j(p)X^i(p) + ...$

On a donc aussi:

$\delta_X^k(t) = \gamma_Y^k(0) + uY^k(p) + tX^k(p) - tu\Gamma_{j,i}^k(p)Y^j(p)X^i(p) + ...$

Faisons la différence des deux quantitées précedentes:

$\delta_X^k(t)$ - $\delta_Y^k(u) = tu(\Gamma_{j,i}^k(p) - \Gamma_{i,j}^k(p))X^i(p)Y^j(p) + ...$

Cette dernière relation assure la fermeture du parallélogramme au premier ordre comme la connexion de Levi- Cevita est sans torsion. Qu'advient-il maintenant si on déplace parallèlement un troisième vecteur le long d'un parallélogramme. Le fait qu'il ne revienne pas à l'identique après un tour de parallélogramme va mesurer la courbure de la connexion.

2.2 Courbure d'une connexion

On reprend les notations du paragraphe précédent. La connexion etant sans torsion, le parallélogramme va se refermer en $q = \delta_X(t) = \delta_Y(u)$ On note $Z(p)$ un vecteur de T_pM On peut alors transporter parallèlement $Z(p)$ en q suivant deux chemins:

$p \rightarrow \gamma_X(t) = \delta_Y(0) \rightarrow \delta_Y(u) = q$

$p \rightarrow \gamma_Y(u) = \delta_X(0) \rightarrow \delta_X(t) = q$

Etudions le transport parallèle suivant le premier chemin. on note $Z(t)$ le transporté parallèle de $Z(p)$ le long de γ_X jusqu'en $\gamma_X(t)$, t petit alors:

$Z^k(t) = Z^k(0) - t\Gamma^k_{i,j}(p)X^i(p)Z^j(p) + ...$

On note $Z(u)$ le transporté parallèle de $Z(t)$ le long de δ_Y jusqu'en $\delta_Y(u)$, u petit alors:

$Z^k(u) = Z^k(t) - u\Gamma^k_{i,j}(\gamma_X(t))Y^i(t)Z^j(t) + ...$

On note alors $\Gamma^k_{i,j}(\gamma_X(t)) = \Gamma^k_{i,j}(t)$

en particulier, $\Gamma^k_{i,j}(0) = \Gamma^k_{i,j}(p)$

Alors au premier ordre:

$\Gamma^k_{i,j}(t) = \Gamma^k_{i,j}(0) + t\frac{d\Gamma^k_{i,j}}{dt}(0) + ...$

Mais comme: $\frac{d\Gamma^k_{i,j}}{dt}(0) = \frac{\partial\Gamma^k_{i,j}}{\partial x^l}(p)\frac{d\gamma^l_X}{dt}(0) = \frac{\partial\Gamma^k_{i,j}}{\partial x^l}(p)X^l(p)$

Cette dernière relation s'écrit:

$\Gamma^k_{i,j}(t) = \Gamma^k_{i,j}(0) + t\frac{\partial\Gamma^k_{i,j}}{\partial x^l}(p)X^l(p) + ...$

En ne retenant que les termes en t, u, tu on a:

$Z^k(u) = Z^k(p) - t\Gamma^k_{i,j}(p)X^i(p)Z^j(p) - u\Gamma^k_{i,j}(p)Y^i(t)Z^j(t) +$

$tu(\Gamma^k_{i,l}(p)\Gamma^l_{s,j}(p)X^s(p)Y^i(p)Z^j(p) - \frac{\partial\Gamma^k_{i,j}}{\partial x^l}(p)X^l(p)Y^i(p)Z^j(p) +$

$\Gamma^l_{i,s}(p)\Gamma^k_{l,j}(p)X^i(p)Y^s(p)Z^j(p))$

Si maintenant on transporte le vecteur $Z(p)$ par le second chemin on obtient une expression symétrique en t et u, la différence entre ces deux vecteurs vaut en renommant les indices pour factoriser l'expression :

$tu(\frac{\partial\Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial\Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^k_{j,l}(p) - \Gamma^l_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p))X^i(p)Y^j(p)Z^l(p)$

Cette quantité donne l'expression locale de la courbure de la connexion:

$R(X,Y)_pZ_p = (\frac{\partial\Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial\Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p))X^i(p)Y^j(p)Z^l(p)$

Définition

La courbure d'une connexion ∇ est donné par la formule:

$R(X,Y)Z = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$

Son expression locale est donnée par:

$R^k{}_{lij} = \frac{\partial\Gamma^k_{j,l}}{\partial x^i}(p) - \frac{\partial\Gamma^k_{i,l}}{\partial x^j}(p) + \Gamma^k_{i,s}(p)\Gamma^s_{j,l}(p) - \Gamma^k_{j,s}(p)\Gamma^s_{i,l}(p)$

3 Propriétés du tenseur de courbure

Nous allons passer en revue quelques propriétées de l'opérateur de courbure. Une propriété importante est le fait que la courbure soit une quantitée tensorielle.

3.1 Le tenseur de courbure

Nous allons préciser un peu dans cette partie en quoi la courbure entre dans le cadre du calcul tensorielle. On a appellé tenseur une forme multilinéaire sur un produit d'espace et d'espaces duaux. En particulier une application linéaire de E dans E peut être vu comme un tenseur de type $(1, 1)$ par l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(E, E)$ et $E \otimes E^*$. De mme une application multilinéaire de $E \times E \times E$ dans E peut etre vue comme un tenseur car elle est isomorphe a: $E \otimes E^* \otimes E^* \otimes E^*$ On a donc un tenseur 3 fois covariant une fois contravariant.

Théorème et définition

Le courbure d'une connexion est un tenseur construit à partir de l'application trilinéaire qui a trois champs de vecteurs X, Y, Z associe le champ de vecteurs $R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})Z$

Donc en coordonnées locales le tenseur sera donné par:

$R = {R^l}_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$

On pose:

$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = R(., \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^i})$

Alors:

$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = {R^l}_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l}$

Posons:

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = Z^k \frac{\partial}{\partial x^k}$,

En évaluant en X, Y, Z on trouve que ${R^l}_{ijk} X^i Y^j Z^k \frac{\partial}{\partial x^l}$ est l'expression obtenue dans la section précédente. Il sagit donc bien d'un tenseur car elle est bien trilinéaire en X, Y, Z comme on le voit dans cette expression locale.

D'autre part on a remarquer que dans le tenseur de courbure on disposait d'un indice "en haut". On peut abaisser cet indice en considérant le tenseur métrique dans le cas d'une connexion Riemannienne, on obtient la forme covariante:

$R_{ijkl} = < R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} >$

car: $R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l{}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}$ Alors:

$< R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} > = < R^m{}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^l} > = R^m{}_{ijk}g_{lm}$

3.2 propriétés de symétries

1)Le tenseur de courbure est antisymétrique par rapport a la permutation de deux indices covariant.

2) Sa forme covariante est antisymétrique par permutation de deux indices.

3) Elle est symétrique par permutation de deux couples d'indices

4)Les composantes de R_{hijk} sont nulles pour $h = i$ ou $j = k$

5) Dans un espace euclidien les symboles de Christoffel sont nuls partout. Donc une condition nécéssaire et suffisante pour que l'espace soit euclidien est que le tenseur de courbure soit nul partout.

A l'aide de ces symétries on peut montrer que les composantes indépendantes de ce tenseur sont au nombre de $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$

3.3 Tenseur de Ricci, courbure scalaire

A partir du tenseur de courbure (de Riemann) On peut envisager des contractions on obtient alors le tenseur de Ricci ainsi que la courbure scalaire.

Le tenseur de Ricci est obtenu en contractant les indices k et l:

$R_{i,j} = R^l{}_{ijl}$

En contractant encore on obtient la courbure scalaire:

$S = g^{ij}R_{ij}$