CNAM UE MVA 210 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle Cours 12: Initiation à la géométrie riemannienne 1

Jeudi 21 Décembre 2006

1 Introduction

Toujours dans le chapitre de la géométrie différentielle intrinsèque, on peut vouloir introduire une métrique autrement dit un outil qui permettrait de calculer des longueurs, des produits scalaires. En fait, on est en train de vouloir généraliser des choses bien connues. En algèbre linéaire, on définit les espaces vectoriels puis les espaces vectoriels euclidiens munis d'un produit scalaire. Le terrain d'applications le plus célèbre de la géométrie riemanienne est la relativité générale.

2 Variétés Riémanniennes

Une variété Riémaniennes est une variété différentiable sur laquelle on a la possibilitée de calculer des longueurs et des produits scalaires. Pour se faire on a besoin d'introduire une métrique; on choisit de munir l'espace tangent au point p de la variété d'un produit scalaire. On définit ainsi un champ de tenseurs symétrique sur la variété.

2.1 Définitions

On donne une définition intrinsèque:

Définition

On appelle Variété Riémannienne un couple (M, g) dans lequel M est une varíeté différentiable et g un champ $\mathcal{C}^\infty$ de tenseur symétrique 2 fois covariant sur la variété. autrement dit la fonction lisse ci-dessous:

$p \rightarrow < X_p, Y_p >_p \in \mathbb{R}$

On rappelle l'expression locale d'une telle métrique. D'après ce qui à été vu précedément au point p, on a appellé: $X^i(p)$ les coordonnées d'un vecteur tangent dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Ainsi un vecteur tangent s'écrit en coordonnées locales:

$X(p) = X^i(p).\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$

d'autre part, on à noté $dx^i(p)$ les éléments de la base de l'espace cotangent.Alors une forme dans cette base:

$\alpha(p) = \alpha_i(p)dx^i(p)$

Alors dans ce contexte, le tenseur métrique s'écrit:

$p \rightarrow g_{i,j}(p)dx^i(p) \otimes dx^j(p)$

Métrique induite

On dispose dans $\mathbb{R}^n$ d'un produit scalaire "canonique" d'après un théorème de Whitney, toute variété M de dimension n différentiable est plongée dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand. On pose alors:

$\forall X(p), Y(p) \in T_p(M) < X(p), Y(p) >_p = X(p).Y(p)$

Dans cette écriture le point dans le membre de droite désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$.
Il est important de noter que l'on peut introduire des métriques différentes sur un même espace. Par exemple un tore ou une bouteille de Klein peuvent être vues comme respéctivement plongés dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ on peut leurs associér des métriques de plongement. On peut aussi voir le tore de manière

intrinsèque et le munir d'une métrique intrinèque : "tore plat".

3 Connexion, connexion métrique

Quand nous avons introduit les coordonnées curvilignes, nous avons définit la différentielle d'un tenseur et la dérivée covariante. Nous avons remarquer que la dérivé des vecteurs de base du système de coordonnées curvilignes sont liés aux vecteurs de base par l'intermédiaire des symboles de Christoffel lesquels vérifient certaines relations de symétries. Nous avons alors définis à la main la connection de Levi-Civita. c'est une connexion sans torsion et compatible avec la métrique.

3.1 Connexion

Nous donnons la définition générale de connexion cependant nous resterons dans ce cours dans le cadre de la géométrie riemanienne. dans ce cadre les formules de dérivations covariantes de tenseurs en coordonnées curvilignes vues avant est le seul exemple qui nous interessera.

Définition

Soit X et Y deux champs de vecteurs (Y a le droit d'être un champ de tenseurs) ; dans ce cas il faut ajouter aux définitions suivantes la compatibilité à la multiplication tensorielle.

On appelle connexion linéaire note $\nabla_X Y$ l'application bilinéaire $(X, Y) \to \nabla_X Y$ qui satisfait aux trois règles de bilinéarité suivantes:

$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_X Z$

$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$

Ainsi que la règle de Leibniz:

$\nabla_X(fY) = X(f)Y$+f $\nabla_X Y$

Il est à noter que la théorie des connexions s'est beaucoup développer depuis : connexion sur les fibrés (principaux entre autre) et que le lien avec la physique est constant: théories de jauges, electromagnétisme....

Exemples

Dans un système de coordonnées curvilignes de l'espace la dérivation covariante introduite à la fin du cours sur la dérivation des champs de tenseurs définie bien une connexion:

La "brique" de base pour la fabriquer est la formule:

$de_i = \Gamma^j_{i,k} e_j(M) du^k$

cette formule est la différentielle du vecteur e_i ce qui donne la d'erivée covariante:

$\nabla_{e_k} e_i = \Gamma^j_{i,k} e_j(M)$ notée plus simplement: $\nabla_k e_i = \Gamma^j_{i,k} e_j(M)$

Ensuite les relations de bilinéaritée et la règles de Leibniz permettent de retrouver la dérivée covariante d'un champ de tenseur.

Plus généralement sur une variété différentiable et dans une carte quelconque une fois donné les informations:

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_k}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \Gamma^j_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_j}$

C'est à dire les symboles de Christoffel dans une carte, on connait la connexion.

3.2 Torsion d'une connexion

La connexion définie à partir de la dérivation en coordonnées curvilignes est sans torsion. on a la définition:

Définition

On appelle torsion de la connexion le tenseur:

$T(X,Y) = \nabla_X Y$ - $\nabla_Y X$ - $[X,Y]$

On a donc une expression de la torsion en coordonnées locales: On sait qu'alors:

$[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$

Comme d'autre part, $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k}$ et $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma^k_{j,i} \frac{\partial}{\partial x_k}$

On en déduit que la connexion définie à partir de la dérivation en coordonnées curvilignes est sans torsion. Car pour cette connexion les symboles de Christoffel sont symétriques en $ietj$

3.3 Connexion compatible avec la métrique

On a pu montrer dans le cas des coordonnées curvilignes que la différentielle du tenseur métrique est nulle. On dira pour le cas d'une connexion quelconque que cette dernière est compatible avec la métrique si:

Définition

Le produit scalaire au point p d'une variété entre deux champs de vecteurs $X(p)$, $Y(p)$ defini la fonction: $p \to g(X(p), Y(p))(p)$ de M dans $\mathbb{R}$ et une connexion est compatible avec la métrique si:

$X.(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

On peut montrer en appliquant cette définition que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle. que l'on retombe sur les identités de Ricci précédemments vues en effet:

Pour $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x_k}$:

$X.(g(Y,Z)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(g(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k})) = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{j,k}$

$g(\nabla_X Y, Z) = g(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}) = g(\Gamma^l_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k}) = g_{l,k} \Gamma^l_{i,j}$

$g(Y, \nabla_X Z) = g(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k},) = g(\frac{\partial}{\partial x_j}, \Gamma^l_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_l}) = g_{j,l} \Gamma^l_{i,k}$

Identitée de Ricci:

$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{j,k} = g_{j,l} \Gamma^l_{i,k} + g_{l,k} \Gamma^l_{i,j}$

En remplacant ces expression dans la dérivée covariante du tenseur métrique on vérifie qu'alors la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle.

Théorème et définition

Il existe une unique connexion sans torsion non compatible avec la métrique sur une variété Riémannienne (M, g) et on la nomme connexion de Levi-Civita.

Démonstration

La démonstration est aisée; Il suffit d'écrire la dérivée covariante et des permutations circulaires sur les indices. On obtient alors les symboles de Christoffel en fonction de la métrique:

$\Gamma^i_{j,k} = \frac{1}{2} g^{i,h} (\frac{\partial g_{k,h}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{j,h}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x_h})$

dans cette expression $g^{i,h}$ désigne la matrice inverse de la mêtrique.

4 Transport parallèle, géodésiques

La notion de transport parallèle vient généraliser pour un espace courbe (ou un espace plat vu à travers un système de coordonnées curvilignes) la notion de translation. Commencons par quelques considérations générales :

4.1 Translation d'un vecteur dans l'espace euclidien

Si on translate (transporte parallèlement un vecteur le long d'une courbe $\mathcal{C}$ l'angle entre ce vecteur et un vecteur tangent à la courbe change si cette dernière n'est pas une droite; le produit scalaire est conservé dans l'opération de translation d'un couple de vecteurs; le vecteur directeur d'une droite est translaté le long de cette droite. Il existe une notion similaire pour des espaces courbes c'est la notion de transport parallèle.

4.2 Transport parallèle le long d'une courbe

On considère maintenant une courbe $t \in [a,b] \to c(t) \in (M,g)$ On dit qu'un vecteur Y est déplacer parallèlement le long de la courbe c quand:

$\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t)} Y(t) = 0$

Dans cette expression, D est la dérivation covariante. On a donc l'expression suivante de la dérivée covariante dans une carte locale:

$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y^j \partial_j = X_i \nabla_{\partial_i} Y^j \partial_j = X^i((\partial_i Y^j)\partial_j + (\Gamma^k_{i,j} Y^j)\partial_k$

$\nabla_X Y = X^i((\partial_i Y^k)\partial_k + (\Gamma^k_{i,j} Y^j)\partial_k$

$\nabla_X Y = X^i(\partial_i Y^k + \Gamma^k_{i,j} Y^j)\partial_k$

En posant $X^i = \frac{dx^i(c(t))}{dt}$ on a:

$\nabla_{\dot{c}(t))} Y = \frac{dx^i(c(t))}{dt}(\partial_i Y^k(c(t)) + \Gamma^k_{i,j}(c(t)) Y^j(c(t)))\partial_k$

d'autre part: $\frac{dY^k(c(t))}{dt} = \frac{\partial Y^k}{\partial x^i}\frac{dx^i(c(t))}{dt}$

donc: $\frac{DY(t)}{dt} = \nabla_{\dot{c}(t))} Y(t) = (\frac{dY^k(c(t))}{dt} + \Gamma^k_{i,j}(c(t)) X^i(c(t)) Y^j(c(t)))\partial_k$

A l'aide de la formule précédente, on voit immédiatement que un vecteur transporté parallèlement dans l'espace euclidien est translaté.

4.3 Equation des géodésiques

On appelle géodésique toute courbe pour laquelle le vecteur vitesse est transporté parallèlement: $\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$ Les calculs précédents fournissent immédiatement l'équation en coordonnées locales:

$\nabla_{\dot{c}(t))}\dot{c}(t) = \frac{d^2x^k(c(t))}{dt^2} + \Gamma^k_{i,j}(c(t))\frac{dx^i(c(t))}{dt}\frac{dx^j(c(t))}{dt} = 0$

C'est une équation ordinaire l'existence de solutions est au moins assurée localement (problème de cauchy)