CNAM UE MVA 210 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle Cours 11: Introduction aux variétés différentiables 2

Jeudi 14 décembre 2006

1 Introduction

Nous avons définie la notion de variété différentiables. On peut donc décrire maintenant les "morphismes" entre variétés. En particulier deux morphismes sont particulièrement importants: L'application linéaire tangente opérant sur les espaces tangents et sa version duale opérant sur les formes différentielles. Ensuite on peut définir les champs de tenseurs sur les variétés.

2 Morphismes entres variétés

Voyons la définition d'un morphisme de variété

Définition

Soient M et N deux variétés différentiables. Une application $F : M \to N$ est différentiable de classe C^k si pour tout $p \in M$, il existe une carte locale (U, φ) de M contenant p de classe C^k, et une carte locale (V, ψ) de N de classe C^k, telle que $F(U) \subset V$ et $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ soit de classe C^k. On peut alors parler aussi de dérivabilité d'une telle application.

2.1 Application linéaire tangente

Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable. Si nous munissons les deux variétés de coordonnées locales respectivement notées (x^i) et (y^j) autour des points $p \in M$ et $F(p) \in N$. Nous voulons définir une application linéaire de T_pM dans $T_{F(p)}N$ associée canoniquement à F et notée T_pF. Pour ce faire on peut utiliser l'une des deux définitions équivalentes de l'espace tangent et aussi exprimer cette application dans une carte locale.

La première méthode consiste à définir un vecteur tangent comme la dérivée d'une courbe paramètrée. Donc soit $X(p) \in \mathrm{T}_pM$. Alors il existe une courbe γ dans M telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X(p)$. Alors $F \circ \gamma$ est une courbe de N qui passe en $F(p)$ à $t = 0$. Si on la dérive en ce point, on obtient un vecteur de $T_{F(p)}N$ et par définition on pose:

$$T_pFX(p) = (\frac{dF\circ\gamma(t)}{dt})_{|t=0}$$

Nous définissons ainsi l'application linéaire tangente.

La deuxième définition consiste à considérer $X(p)$ comme une dérivation sur les fonctions définies sur M. Soit donc une fonction $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sur N . On remarque que $f \circ F$ est une fonction définie sur M. Par définition on pose:

$$T_pFX(p).f = X(p).(f \circ F)$$

Il est enfin possible de décrire cette fonction en coordonnées locales On a:

$$F^j(x^1(p), ...x^n(p)) = y^j(F(x^1(p), ..., x^n(p)))$$

On a alors matriciellement:

$$T_pF(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

On va alors décrire une opération analogue pour les formes différentielles qui généralise l'image réciproque d'une forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Pull-back d'une forme différentielle sur une variété

On considère maintenant $\alpha \in \Omega^1(N)$ et $X \in \Gamma(M)$. On définit alors $F^*\alpha \in \Omega^1(M)$ par:

$$< F^*\alpha(F(p)), X(p) >=< \alpha(F(p), T_pFX(p) >$$

Cette application est l'application de pull-back. On a des relations similaires aux pull-back de formes sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$

3 Tenseurs et formes différentielles sur une variété

Maintenant que l'on dispose d'un espace vectoriel : l'espace tangent et son dual l'espace cotangent en tout point p d'une variété on dispose de surcroit d'un calcul tensoriel on peut construire l'espace:

$$T_p^{s,r} = \underbrace{T_pM \bigotimes ... \bigotimes T_pM}_{sfois} \otimes \underbrace{T_p^*M \bigotimes ... \bigotimes T_p^*M}_{rfois}$$

Un élément T de l'espace précédent, est un tenseur de type (s, r) au dessus de tout point p; et en coordonnées locales, un tel tenseur s'écrit:

$$T(p) = T^{i_1...i_s}{}_{j_1...j_s}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}}(p) \otimes dx^{j_1}(p) \otimes ... \otimes dx^{j_r}(p)$$

3.1 Champs de tenseurs

On peut considérer alors le fibré des champs de tenseurs de type (s, r), c'est la variété différentielle:

$$T_p^{s,r}M = \bigcup_{p\in M} T_p^{s,r}M$$

Une section de ce fibré est appellée champ de tenseur de type (s, r) .Un tel champ s'écrit donc au dessus d'une carte locale:

$$T = T^{i_1...i_s}{}_{j_1...j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_r}$$

On peut alors définir les formes différentielles sur une variété. (il suffit de les définir en coordonnées sur des ouverts de cartes et tout cela a déjà été définie.

3.2 Champs de formes différentielles

Si dans les expressions précedentes, on oublie les composantes contravariantes on obtient les champs de formes différentielles sur une variété. C'est le calcul extérieur sur une variété et c'est la partie antisymétrique de l'algèbre tensorielle. Une r-forme différentielle sur une variété M est un élément de $\Omega^r(M)$ et s'ecrit:

$$\omega(p) = \omega_{j_1 \ldots j_s}(p)\ dx^{j_1}(p) \wedge \ldots \wedge dx^{j_r}(p)$$

3.3 Cohomologie de de Rham sur une variété

Toute variété peut être recouverte par des ouverts et on définie une cohomologie de De Rham sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$ On peut montrer qu'il est possible de construire la cohomologie de la variété à partir de celle des ouverts de $\mathbb{R}^n$ au moyen de suites exactes appropriées.