CNAM UE MVA 210 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle Cours 10: Introduction aux variétés différentiables 1

Jundi 7 décembre 2006

1 Introduction

Dès l'introduction des coordonnées curvilignes on comprend bien que l'espace euclidien n'est pas modèle unique pour représenter des configurations. Par exemple en resolvant des systèmes d'équations différentielles particulière periodiques, l'espace des solutions appartient intrinsèquement à un tore et non à $\mathbb{R}^n$. En physique on sait depuis Einstein que la matière courbe localement l'espace et qu'il est par consequent impossible de déplacer un repère de manière rectiligne. Pour toute ces raisons les mathématiciens ont été ammené à définir la géométrie différentielle intrinsèque.

2 Variétés différentiables

Voyons tout d'abord la définition d'une variété topologique.

2.1 Variétés topologiques

Une variété topologique M est un espace topologique séparé telle que pour tout point $p \in M$ Il existe un ouvert U contenant p et un homéomorphisme φ:

φ: $U \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^n$

Dans cette expression W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Alors n represente la dimension de la variété. Le couple (U, φ) est une carte locale, l'homéomorphisme φ represente la "lecture" dans une carte.

Définition

Un ensemble de cartes locales (U_i, φ_i) qui recouvre la variété s'appelle un atlas.

2.2 Variétés différentiables

Il est naturel ensuite de disposer d'une notion de différentiabilité. Cependant cette définition utilise explicitement la structure d'espace vectoriel ainsi l'expression: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ n'a aucun sens si l'espace topologique n'est pas un espace vectoriel la généralisation de la notion de différentiabilité vas donc se faire au travers des cartes.

Définition

On dit que M est une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ si:

-M est une variété topologique

-Les changements de cartes sont de classes $\mathcal{C}^r$:

Il existe un atlas reunion des (U_i, φ_i) tel que:

$\forall (i,j)$ avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$:$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ de classe $\mathcal{C}^r$

2.3 Fonction différentiable

On dira qu'une fonction f de la variété M dans $\mathbb{R}$ est différentiable de classe $\mathcal{C}^r$ quand pour toute carte locale (U, φ) de classe l'application:

$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$

est différentiable et de classe $\mathcal{C}^r$

2.4 Coordonnées locales

Soit (U, φ) une carte locale de la variété différentiable M pour tout point p de l'ouvert U, $\varphi(p)$ peut s'écrire:

$\varphi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$.

On dira que $(x^1(p), ..., x^n(p))$ sont les coordonnées de p lues dans la carte (U, φ)

3 Espace tangent en un point

Une sphère est un cas particulier très simple de variéé. On a l'habitude de la voir plongée dans un l'espace $\mathbb{R}^3$. On visualise donc bien l'espace tangent en un point p de la dite sphère: il sagit du plan tangent à la sphère au point p. Cependant nous aimerions construire cet espace grâce à une démarche untrinsèque sans faire référence à un quelconque espace extèrieur; deux constructions existent et elles sont bien sûr équivalentes. Suivant les problèmes on a recours a l'une ou l'autre de ces approches qui sont vraiment complémentaires.

3.1 Première approche: tangentes à une courbe.

Soit p un point de la variété M. On note $\mathcal{C}$, l'ensemble des courbes $\gamma : [-1, 1] \to M$ telles que $\gamma(0) = p$. Alors il existe un ε assez petit pour que l'image de l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ soit inclus dans un ouvert de carte U. Notons (U, φ), la carte en question et x^i les applications coordonnées sur cette carte. Alors la relation binaire ci dessous est une relation déquivalence:

$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow (\frac{dx^i(\gamma(t))}{dt})_{t=0} = (\frac{dx^i(\gamma'(t))}{dt})_{t=0}$

Cette relation signifie que nous considèrons comme équivalentes deux courbes qui ont même vecteurs tangents en 0 dans $\mathbb{R}^n$. Par Définition l'espace tangent est l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{C}$ pour cette relation est par définition l'espace tangent au point p

3.2 Seconde approche: dérivations

On considère l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M noté:

$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \ / \ f$ de classe $\mathcal{C}^\infty\}$

Sur $\mathcal{F}(M)$ on considère la relation (d'équivalence):

$f \sim g \Leftrightarrow \exists U(ouvert) \subset M, p \in U \ / \ f_{|U} = g_{|U}$

On note $\widetilde{f}$ une classe d'équivalence, l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation est noté $\mathcal{C}_p^\infty(M)$. On appelle dérivation une application de $\mathcal{C}_p^\infty(M)$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait la règle de Leibniz.On appelle alors espace tangent l'ensemble de telles dérivations.

Remarque

Les deux définitions sont équivalentes on remarquera simplement que l'on dëfinit une dérivation associé au chemin γ par :

$\widetilde{f} \rightarrow (\frac{df(\gamma(t))}{dt})_{t=0}$

3.3 Espace tangent en p en coordonnées locales

On note toujours $(x^1, ..., x^n)$ les coordonnées au voisinage de p, une base de $T_p(M)$ est donnée par les n-dérivations: $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ dont les courbes associées sont les γ_i définies par:

$x^i(\gamma_j(t)) = 0$ pour $i \neq j$ et $x^i(\gamma_i(t)) = t$

Par suite,on notera $X^i(p)$ les coordonnées d'un vecteur tangent dans la base des $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$. Ainsi un vecteur tangent s'écrit en coordonnées locales:

$X(p) = X^i(p).\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$

4 Fibré tangent et champ de vecteurs

En chaque point p de la variété nous avons définit l'espace tangent. On peut alors considérer l'application qui au point p de M associe un vecteur dans T_pM cette application s'appelle un champ de vecteurs.

4.1 Fibré tangent

On va considérer la reunion de tous les espaces tangents quand p parcours la variété M:

$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$

Cet espace s'appelle le fibré tangent.

Notations

L'application $\pi : TM \rightarrow M$ définie par $\pi(p, X) = p$ est surjective et c'est la projection de TM sur M.

Une section est une application X de M dans TM telle que $\pi \circ X$ est l'identité. C'est ici un champ de vecteurs.

4.2 Dérivations et champs de vecteurs

On appelle dérivation sur l'algèbre $\mathcal{F}(M)$ toute application D de $\mathcal{F}(M)$ dans lui même qui vérifie ma relation de Leibniz: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$. Par exemple Un champ de vecteur définit une derivation par la relation:

$(X.f)(p) = X(p).f$ qui s'ecrit localement:

$(X.f)(p) = X^i(p).\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$

C'est la dérivée dans la direction de X

4.3 Crochet de Lie

Puisque $X.f$ appartient à l'algèbre $\mathcal{F}(M)$, on peut lui appliquer un autre champ de vecteur Y, on obtient une application linéaire $YX : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ Il est facile de voir que ce n'est pas une dérivation. Par contre l'application:

$[X, Y] = XY - YX$

est appellé crochet de Lie des champs de vecteurs et c'est une dérivation (grâce au lemme de Schwarz)

L'expression locale du crochet de Lie est:

$[X, Y] = (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$

Exercice

Demontrer l'identité de Jacobi:

$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

4.4 Flot d'un champ de vecteurs

A partir d'un champ de vecteur donné on peut (en physique par exemple être interessé par les lignes de champs (ensemble des points de contacts avec le champ). Un exemple concret est la limaille de fer dessinant les lignes du champ magnétique crée par un aimant. Cela se traduit en mathématiques par la resolution de l'équation différentielle:

$\frac{d\gamma(t)}{dt} = X_{|\gamma(t)}$ dont l'inconnue est la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to M$

Définition

Le flot de X et l'unique solution $t \to \varphi_X(t, p)$ de condition initiale:

$\varphi_X(0, p) = p.$

Remarque

On a la relation suivante traduisant le fait que le que le flot engendre un groupe à 1 paramètre de difféomorphisme:

$\varphi_X(t, \varphi_X(s,p)) = \varphi_X(t+s,p)$

Exercice

Demontrer que: $\varphi_{\lambda X}(t/\lambda, p) = \varphi_X(t,p)$

5 Espace cotangent

Maintenanr que l'on a fabriquer un espace vectoriel à partir de T_pM, On peut fabriquer l'espace dual (Les formes linéaires sur T_pM et bien sûr noté : T^*_pM. Si $X(p)$ est un vecteur appartenant à l'"espace tangent T_pM, on note $\alpha(p)$ l'élément dual qui lui correspond dans T^*_pM. On a alors :$\alpha(p)(X(p)) = < \alpha(p), X(p) > \in \mathbb{R}$ Voyons alors l'exemple classique d'élements du dual : les formes exactes: différentielle d'une fonction.

5.1 Différentielle d'une fonction

Soit f une fonction définie sur une variété M. Alors l'application qui a $X(p)$ associe $X(p).f$ est linéaire de T_pM dans $\mathbb{R}$. C'est donc un élément de T^*_pM. On note cet élément $df(p)$ et on a:

$df(p)(X(p)) = < df(p), X(p) > = X(p).f$

On dit que $df(p)$ est la différentielle de la fonction f au point p

5.2 Espace cotangent en coordonnées locales

On a vu que localement au dessus d'un ouvert U une carte locale de M est donnée par les x_i $i = 1, ...n$ et une base de l'espace tangent est fournie par les $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ On note alors $dx^i(p)$ les éléments de la base de l'espace cotangent. On a aussi:

$< dx^j(p), \frac{\partial}{\partial x_i}(p) > = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta^i_j$

Alors dans cette base:

$df(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx^i(p)$

5.3 Fibré cotangent et 1-formes différentielles

Quand p décrit la variété M, On peut considèrer la variété différentiable ci-dessous:

$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$

Cette variété est le fibré cotangent de M. Une section de classe: $\mathcal{C}^\infty$

$\alpha : M \to T^*M$

de ce fibré est appellée une 1-forme différentielle sur M c'est donc une application qui associe au point p de la variété un élément $\alpha(p)$ de T_p^*M. On note $\Omega^1(M)$ l'espace vectoriel des 1-formes différentielles sur M Ainsi par exemple si f est une fonction sur M alors, $df \in \Omega^1(M)$ qui au point p de la variété M associe $df(p)$ appartenant à T_p^*M.

Localement, sur tous les ouverts de cartes U, nous pouvons écrire $\alpha(p) = \alpha_i dx^i(p)$.