CNAM UE MVA 210 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle Cours 1: Topologie générale, espace métriques

Jeudi 5 octobre 2006

1 Eléments de topologie

1.1 Espace metrique

Un ensemble E est appelé espace métrique, s'il peut être muni d'une distance c'est à dire d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ satisfaisant:

$\forall (x, y) \in E \times E \; d(x, y) = d(y, x)$
$\forall (x, y) \in E \times E \; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
$\forall (x, y, z) \in E^3 \; d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Exemples

1)Le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne est un espace metrique.

2)L'ensemble des mots sur l'alphabet$\{0, 1\}$ muni de la distance suivante:

$d(\sigma, \tau) = (\frac{1}{2})^k$ si $\sigma = \alpha\sigma' \; \tau = \alpha\tau'$

avec α plus long prefixe de longueur k commun aux deux chaines est un espace metrique.

Définitions

1) On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r l'ensemble:

$B_O(x_0, r) = \{x \in E / d(x_0, x) < r\}$

2) On appelle voisinage V du point x_0 toute partie de E qui contient une boule ouverte centré sur le point x_0.

L'ensemble des voisinages du point x_0 est noté: $\mathcal{V}(x_0)$.

3) Un ouvert de E est une partie O de E telle que chaque point est centre d'une boule ouverte entièrement incluse dans O.

De ces définitions découle le fait que $\emptyset$ est un ouvert. Cela est juste un problème de logique: il ne contient aucun points donc ne contredit en rien 3).
D'autre part E est un ouvert (demonstration aisée)

On peut aussi remarquer que l'intersection de deux ouverts est un ouvert, qu'une reunion même infinie d'ouverts est ouverte

De ces propriétés on tire une définition générale d'une topologie sur un ensemble X. Il faut pour cela définir un ensemble d'ouverts.

1.2 Espace topologique

Soit X un ensemble, une famille d'ouverts $\mathcal{O}$ sur X est un ensemble de parties vérifiant les axiomes suivants:

$\emptyset, E$ sont dans $\mathcal{O}$

$A_i \in \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$

$A, B \in$O$\Rightarrow A \bigcap B \in \mathcal{O}$

Remarque la reunion dans le second axiome porte sur un ensemble non necessairement fini.

Exercice

Construire toutes les topologies sur $X = \{a, b\}$
Même question avec $X = \{a, b, c\}$

Définitions

1)On appelle fermé le complementaire d'un ouvert.
par passage au complementaire on peut déduire un système d'axiomes pour les fermés.

2)On peut aussi définir une notion de voisinage dans un espace topologique géneral:
On appelle voisinage V du point x_0 toute partie de X qui contient un ouvert contenant le point x_0.

Exercice

Dans cet exercice l'espace topologique consideré est l'ensemble des nombres réels; la famille d'ouverts engendrée par les intervalles ouverts.

1) L'ensemble A défini ci-dessous est-il un ouvert?

$A =]0,3] \bigcup]4,5[\bigcup ([5,6[\bigcap \mathbb{Q}) \bigcup \{7\}$

2) A est il un voisinage du reel 2, du reel 7?

1.3 Intérieur, adherence, frontière

-On dit que x est à l'intérieur de A si il existe un ouvert U de X qui contient x et est contenu dans A .
Remarque: l'intérieur de A noté $Int(A)$ est le plus grand ouvert contenu dans A.
-On dit que x est dans l'adherence de A si tout ouvert U de X qui contient x rencontre A .
Remarque: l'adherence de A noté $Adh(A)$ est le plus petit fermé contenant A.
-L'adherence d'un ensemble privé de son intérieur est sa frontière noté $Fr(A)$.

Exercice

On reprend l'ensemble A de l'exercice precedent et la même topologie sur $\mathbb{R}$ Determiner $Int(A)$, $Adh(A)$,$Fr(A)$

1.4 Espace compact

La notion de compacité est une notion importante; Une partie A d'un espace topologique est dite compacte si de tout recouvrement de A par des ouverts de X on peut extraire un sous recouvrement fini. Cette définition est dite de Borel-Lebesgue.

Théorème

Dans un compact A de toute suite de points peut être extraite une sous-suite convergente dans A. La limite de la sous-suite extraite est appellé valeur d'adherence de la suite.

Le résultat important à retenir est que dans $\mathbb{R}^n$ les partie compactes sont les fermés bornés.

Théorème

Tout produit fini d'espaces compacts est compact.

1.5 Espace metrique complets

Dans un espace metrique on dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l quand elle vérifie:

$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N \Rightarrow d(x_n, l) < \varepsilon$

Il faut comprendre qu'à partir du rang N tous les termes de la suite sont dans la boule de centre l et de rayon ε.

Dans un espace metrique on dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy quand elle vérifie:

$\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, n > N, p > N \Rightarrow d(x_n, x_p) < \varepsilon$

Un espace metrique est complet quand toute suite de Cauchy converge dans cet espace.

exemples

$\mathbb{R}$ est complet, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.