CNAM UE MVA 210 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle Cours 4: Calcul differentiel 2

Jeudi 26 octobre 2006

1 Formes différentielles de degrés 1

Dès l'introduction des bases du calcul différentiel, nous avons mis en evidence de nouveaux objets mathématiques: Les formes différentielles de dégrés 1 appellées encore 1-formes différentielles.

Définition

Une 1-forme différentielle, sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ (dual de $\mathbb{R}^n$). C'est donc l'objet ω défini par:

$$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \omega_2(x)dx_2 + ... + \omega_n(x)dx_n$$

Si chaque ω_i est de classe $\mathcal{C}^k$ on dira que ω est de classe $\mathcal{C}^k$.

1.1 Introduction; passage du local au global

Si on revient aux notions de base en topologie des espaces vectoriels normés, on observe qu'un ouvert peut avoir une forme assez compliquée dès que la dimension dépasse 1. La seule garantie est qu'il est voisinage de chacun de ses points donc qu'il contient une boule ouverte autour de chacun d'eux. La boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ est un objet particulièrement simple: c'est un objet local qui pourra toujours être choisi aussi petit qu'on veut . En revanche l'ouvert a une taille fixé; c'est un premier exemple d'objet global. Les formes différentielles sont historiquement le premier outil permettant à Poincaré de bâtir "l'analyse situs", (ancien nom pour topologie) et d'apprehender la topologie globale en élaborant les premiers outils de la topologie algébrique.

1.2 Forme differentielle de degré un sur un ouvert de $\mathbb{R}$

Soit f une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}$; alors une forme différentielle continue s'ecrit:

$\omega(x) = f(x)dx$

On verra un peu plus loin ce qu'est une forme fermée; comme toute fonction continue sur un intervalle U de $\mathbb{R}$ admet des primitives on conclue à l'existence d'une fonction F telle que:

$dF(x) = f(x)dx$

ω est donc la différentielle de cette fonction:

$\omega = dF$

Quand une forme différentielle vérifie cette assertion on dit qu'elle est exacte: Dans $\mathbb{R}$ toute forme de degré un (au moins continue) est exacte. Donc en particulier toute forme fermée est exacte. On verra que trivialement toute forme exacte est fermée (fermée signifie $d\omega = 0$, et donc $ddf = 0$.)

Retenons dans $\mathbb{R}$: formes fermées = formes exactes

Ce resultat n'est plus vrai dans $\mathbb{R}^2$. En fait on peut montrer la nature topologique de l'ouvert est liée a ce resultat. Voici quelques définitions qui permettent de mieux cernér la complexité d'un ouvert de taille plus grande que 1

Définitions

On dit qu'un ouvert U est connexe s'il n'existe pas de partition de U en deux ouverts disjoints. Si ce n'est pas le cas, chacun des ouverts est appellé composante connexe.

On dit qu'un ouvert U est connexe par arcs si deux points quelconques de U peuvent être joint par un chemin.

On dit qu'un ouvert U est étoilé quand on peut retracter cet ouvert sur l'un de ses points.

On dit qu'un domaine U est convexe si deux quelconques de ses points peuvent être joint par un segment.

Exemples

$\mathbb{R}$ -$\{0\}$ est connexe, connexe par arc, non étoilé , non convexe.

1.3 Topologie des ouverts de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$

Un ouvert de $\mathbb{R}$ est toujours une réunion disjointe d'ouverts étoilés. De plus, le simple fait d'enlever un point à un ouvert de $\mathbb{R}$ ne change pas fondamentalement sa topologie; on a encore une reunion d'ouverts étoilés simplement on augmente le nombre de composantes connexes.

En revanche dans $\mathbb{R}^2$ on a pas la même chose. Si on enlève un point à une boule ouverte (cas particulier d'ouverts étoilés) on n'obtient plus un ouvert étoilé.

La signature de ces différences peut être mesurée au niveau des forme differ--entielles. On peut montré que localement toute forme fermée est exacte mais que ce résultat ne subsiste globalement que pour des ouverts étoilés.

Définitions

Soit φ une application différentiable d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^p$. si ω est une forme différentielle de degré 1 sur V la transposée (ou l'image réciproque ou pull-back en anglais) de la 1-forme différentielle $\varphi^*\omega$ définie par:

$\forall x \in U,\ \varphi^*\omega(x) = \omega(\varphi(x))\varphi'(x).$

Remarque: si U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et a, b deux points de U, on peut considerer le segment $[a, b]$. φ est alors une application différentiable de $[a, b]$ dans V appelée chemin. Une application des formes differentielles de degrés 1 est le calcul des intégrales curvilignes.

1.4 Intégrale curviligne

Soit φ est alors une application différentiable de $[a,b]$ dans U ouvert de $\mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$; On appélle intégrale curviligne de la forme ω sur le chemin φ le nombre:

$\int_a^b \varphi^*\omega = \int_a^b \omega(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Remarque

Comme on est dans $\mathbb{R}^n$ la forme est connue dans un système de coordonnées et le chemin φ est l'application différentiable qui au "temps" t associe la position $x(t)$:

$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \omega_2(x)dx_2 + ... + \omega_n(x)dx_n$

$x(t) = \varphi(t) = (x_1(t), ...x_n(t))$

Cette intégrale a une importance capitale en physique elle représente la circulation d'un champ de vecteurs (dans l'identification entre l'espace des champs de vecteurs et son dual, l'espace des formes) le long d'une courbe. Dans le cas ou la forme est exacte, ce champ de vecteurs est un champ de gradient et l'intégrale ne dépend pas du chemin suivi.

2 Forme différentielle fermée, forme exacte

2.1 Définition

Soit $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + ... + \omega_n dx_n$

Une forme différentielle de degré 1. On dit qu'elle est exacte si elle est la différentielle d'une fonction: $\omega = df$

Alors on peut écrire ω sous la forme:

$\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + ... + \omega_n dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$

on dit aussi que ω provient d'un champ de gradients dans l'identification espace, espace dual .

Une forme différentielle est fermée si elle vérifie:

$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_{\ltimes}{}^2,\ \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} = 0$

On verra, que pour une forme quelconque, cela signifie annuler la derivée exterieur $d\omega = 0$ ou vectoriellement $rot\omega = 0$: Par exemple pour l'analyse à deux variables le rotationnel (ou la d'erivée exterieur) de la un- forme:

$\omega(x,y) = \omega_1(x,y)dx + \omega_2(x,y)dy$

est simplement la fonction:

f(x,y) $= \frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y}$

Plus exactement cette fonction correspond à la composante du champ de rotationnels associé à la dérivée exterieur de la forme ω c'est à dire la deux forme:

$d\omega(x,y) = (\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y})dx \bigwedge dy$

Exercice

Ecrire le rotationnel pour une 1-forme dans l'espace.

Remarques exemples

-On voit immédiatement qu'une forme de degré 1 sur $\mathbb{R}$ est fermée.

-Toute forme différentielle fermée de degré 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ est exacte : c'est une conséquence du théorème de Schwarz.

-La réciproque est fausse:

2.2 Théorème (exercice)

soit $\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$

la forme différentielle définie sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant un disque privé du point (0,0). Alors ω est fermée mais non exacte.

2.3 Plan de démonstration

-1) Vérifier que ω est fermée

-2) Ecrire la différentielle d'une fonction f en coordonnées polaires.

-3) Supposer que $\omega = df$ et montrer que l'on aboutit à une contradiction en calculant ω le long d'un disque fermé entourant l'origine.

2.4 Lemme de Poincaré (dans $\mathbb{R}^2$)

Pappelons qu'un ouvert U est étoilé par rapport à un de ses points x_0 quand quel que soit le point x de U, le segment d'extremitées x_0 et x est contenu dans l'ouvert.

Théorème

Si U est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$, toute forme différentielle fermée est exacte.

Demonstration

posons: $\omega(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

On introduit la fonction continue:

$f(x, y) = \int_0^1 (xP(tx, ty) + yQ(tx, ty))dt$

$f'_x(x, y) = \int_0^1 (P(tx, ty) + txP'_x(tx, ty) + tyQ'_x(tx, ty))dt$

Mais:

$\frac{\partial}{\partial t}(P(tx, ty) = xP'_x(tx, ty) + yP'_y(tx, ty)$

et comme ω est fermée:

$\frac{\partial}{\partial t}(P(tx, ty) = xP'_x(tx, ty) + yQ'_x(tx, ty)$

et finalement:

$f'_x(x, y) = \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial t}(tP(tx, ty))dt$

d'où: $f'_x(x,y) = P(x,y)$

On fait de même avec l'autre dérivée partielle.

3 Epilogue, mathématique cohomologie de De Rham

Nous allons dans cette section faire une synthèse des notions rencontrées:

3.1 "Contenu topologique" d'un ouvert U de $\mathbb{R}$

Prenons une fonction numérique f dont l'ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour simplifier, on suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. l'ensemble des fonctions en questions est noté $\mathcal{C}^\infty(U)$ et peut être vu comme l'ensemble des 0-formes diff'erentielles de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur U encore noté $\Omega^\infty(U)$. On peut différentier f on obtient une 1-formes différentielles (Cela correspond en physique a prendre l'opérateur gradient) .Le processus s'arrête alors car on ne peut pas dériver une 1-forme différentielle (les deux formes sont nulles pour l'analyse à une variable. On a alors le schema suivant:

$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} 0$

Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle s'est dire que f appartient au noyau de d $Ker\ d$ donc que f est localement constante. (i.e constante par composante connexes. Ce noyau renseigne donc sur la connexité de U. En mathématique, on pose $H_0(U) = Kerd$

3.2 "Contenu topologique" d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$

Prenons une fonction numérique f à deux variables dont l'ensemble de définition est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour simplifier, on suppose f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. l'ensemble des fonctions en questions est noté $\mathcal{C}^\infty(U)$ et peut être vu comme l'ensemble des 0-formes différentielles de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur U encore noté $\Omega^\infty(U)$. On peut différentier f on obtient une 1-formes différentielles (Cela correspond en physique à prendre l'opérateur gradient) .Le processus peut continuer dans $\mathbb{R}^2$ la dérivée d'une 1- forme est son rotationnel, (voir la définition plus haut).On a alors une flêche de plus dans le schema vu ci-dessus:

$\mathcal{C}^\infty(U) \xrightarrow{d} \Omega_1(U) \xrightarrow{d} \Omega_2(U) \xrightarrow{d} 0$

Dire que la différentielle d'une fonction (ou son gradient) est nulle s'est dire que f appartient au noyau de d $Ker\ d$ donc que f est localement constante. (i.e constante par composante connexes. Ce noyau renseigne donc sur la connexité de U. En mathématique, on pose $H_0(U) = Kerd$. Mais on peut dire des choses supplémentaires:

Dire qu'une 1 forme est exacte, c'est dire qu'elle provient de la différentielle d'une fonction (ou d'un champ de gradients) elle alors dans l'image de l'opérateur d :$Im\ d$. On sait alors que son rotationnel est nul (Une forme exacte est fermé). L'obstruction a la réciproque de cette assertion est exactement ce qui est contenu dans le premier groupe de cohomologie :$H_1(U) = Kerd/Imd$ .fin de la petite histoire... Et premisses d'une belle théorie topologique et algébrique.