CNAM UE MVA 210 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle Cours 8: Formalisme du calcul tensoriel

Jeudi 23 novembre 2006

1 Introduction générale d'un tenseur

Nous avons déjà rencontré des tenseurs; tout ce qui va être dit dorenavant ne sera qu'une généralisation de choses connues. Le premier exemple de tenseur est étudié au collège, il sagit du vecteur; puis chemin faisant on arrive au lycée et dès les premiers rudiments de calcul différentiel on découvre le symbole "dx" dont on vient d'apprendre que ce n'est rien d'autre qu'une forme linéaire agissant sur un vecteur son "dual" en quelques sortes . En dimension finie on ne peut pas creer grand chose de plus et le dual d'une forme redonne a isomorphisme canonique près le vecteur dont on est parti. On a donc une parfaite symétrie entre ces deux objets qui représentes les piliers du calcul tensoriel. Mais encore au lycée , on est familiarisé avec d'autres outils comme le produit scalaire de deux vecteurs on apprendra qu'il sagit d'un deux tenseurs symétrique. En bref on en a rencontrer d'autres, qui se nommes determinants, produits exterieurs...Mais il est important de remarquer qu'ils sont tous fabriqués à partir des mêmes ingrédients, des vecteurs et des formes linéaires agissant sur ces mêmes vecteurs. L'opération perméttant de les fabriquer est le produit tensoriel dont on connait déjà une forme dégénerée: le produit exterieur à qui est confié la création d'objets antisymétriques.

2 Définition d'un tenseur, exemples

De l'introduction précédente et de ce qui a été vu précedement on rappelle la définition suivante:

Définition 1

Soit E Un espace vectoriel de dimension finie n, E^* l'espace dual de E donc de même dimension, le produit tensoriel de p formes linéaires φ_i est la forme p linéaire $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes ... \otimes \varphi_p$ définie par:

$\forall (x_1, x_2, ..., x_p) \in E^p$, $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes ... \otimes \varphi_p(x_1, ...x_p) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)..., \varphi_p(x_p)$

On appelle ce produit un tenseur de type $(0, p)$ p fois contravariant. Dans une base e_i^* on a alors: $\forall (x_1, x_2, ..., x_p) \in E^p$:

$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes ... \otimes \varphi_p(x_1, ...x_p) = \sum_{i_1,i_2,...,i_p} T_{i_1,i_2,...,i_p} e_{i_1}^*(x_1) e_{i_2}^*(x_2)..., e_{i_p}^*(x_p)$

On convient alors des notations suivantes appellées conventions d'Einstein:

Notations

Une forme est noté avec un "indice" en haut, dans une sommation quand un indice en haut apparait en bas ou réciproquement, le signe somme correspondant à cet indice disparait: c'est la convention d'Einstein ainsi dans une base φ s'écrit:

$\varphi^1 \otimes \varphi^2 \otimes ... \otimes \varphi^p = T_{i_1,i_2,...,i_p} e^{i_1} e^{i_2}..., e^{i_p}$

Remarque

Si v désigne un vecteur dans la base e_i de E on note λ^i ses coordonnées donc en notation d'Einstein:

$v = \lambda^i e_i$

Si φ désigne un co-vecteur (une 1-forme) dans la base e^i de E on note λ_i ses coordonnées donc en notation d'Einstein:

$\varphi = \lambda_i e^i$

Cette définition se généralise car en dimension finie un vecteur est associé canoniquement à une forme comme élément du bidual et on à la:

Définition 2

On appelle tenseur de type (p, q), p- contravariant et q-covariant la forme $p+q$ linéaire définie sur $E^* \times ... \times E^* \times E \times ... \times E$ produit de p espaces E^* et q espaces E par:

$T = T^{i_1,i_2,...i_p}{}_{j_1,j_2,...j_q} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_q}$

Théorème et définition

L'ensemble des tenseurs de type (p, q) forme un espace vectoriel de dimension $n^p n^q$ noté $E^* \bigotimes ... \bigotimes E^* \bigotimes E \bigotimes ... \bigotimes E = E^{*\bigotimes p} \bigotimes E^{\bigotimes q}$ appellé produit tensoriel d'espaces vectoriels.

Remarque

On peut aussi melanger les espaces et leurs duaux et par exemple définir un tenseur sur $E \bigotimes E^* \bigotimes E^* \bigotimes E \bigotimes E$:

$T = t_i{}^{jk}{}_{ln}\ e^i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e^l \otimes e^n$

il sera de même ordre que le tenseur: $S = t_{ijk}{}^{ln}\ e^i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e_l \otimes e_n$

défini sur $E \bigotimes E \bigotimes E \bigotimes E^* \bigotimes E^*$, mais pas de même type.

2.1 Exemples de tenseurs

Les vecteurs et les formes linéaires sont des tenseurs, plus généralement, tout objet combinant des vecteurs et des formes et construit en respectant les règles vues plus haut est un tenseur. En particulier, en combinant deux formes linéaire on peut fabriquer une forme bilinéaire qui peut devenir un produit scalaire si le tenseur qui lui est associé est symétrique. D'autre part, les formes multilinéaires alternées sont un autre exemple de tenseurs (tenseurs antisymétriques)

3 Propriété fondamentale des tenseurs

De même qu'un vecteur reste inchangé quand on l'exprime dans des bases différentes cette propriétée devra être vérifiée par les tenseurs. C'est souvent par ce moyen qu'on peut décider si une quantitée est tensorielle où non. Rappelons dans notre nouveau système de notations comment les coordonnées d'un vecteur se comporte via un changement de base:

3.1 Changement de base cas d'un vecteur ou d'une forme

Soit $\mathcal{B} = (e_\mu)$ et $\mathcal{B}' = (e'_\mu)$ deux bases de E de dimension n, $L = (L^\nu_\mu)_{\nu\mu}$ avec comme d'habitude μ indice de colonne de la matrice de changement de base. alors :

$e'_\mu = (L^\nu_\mu) e_\nu$

Si on note Λ la matrice inverse : $L^{-1} = \Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)_{\mu\nu}$ alors:

$L^\mu_\nu \Lambda^\nu_\rho = \Lambda^\mu_\nu L^\nu_\rho = \delta^\mu_\rho$

Alors,$e_\mu = (\Lambda^\nu_\mu) e'_\nu$

Au niveau des vecteurs, ces relations donnent:

$v = v^\mu e_\mu = v^\mu \ \Lambda^\nu_\mu e'_\nu$ et $v = v'^\mu e'_\mu = v'^\mu L^\nu_\mu e_\nu$

Soit:

$v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \ v^\nu$

$v^\mu = L^\mu_\nu \ v'^\nu$

Ces deux relations correspondent au critère de tensorialité dégénéré aux vecteurs. En "dualisant" ces expressions on obtient un critère analogue pour les formes:

Exercice

Montrer que si la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_\mu)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_\mu)$ est $L = (L^\mu_\nu)_{\mu\nu}$ Alors, la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e^\mu)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'^\mu)$ est $\Lambda = (\Lambda^\mu_\nu)_{\mu\nu} = L^{-1}$

Au niveau des formes donc:

$\omega = \omega_\mu e^\mu = \omega_\mu \ L^\mu_\nu e'^\nu$ et $\omega = \omega'_\mu e'^\mu = \omega'_\mu \Lambda^\mu_\nu e^\nu$

Soit:

$\omega'_\mu = L^\nu_\mu \ \omega_\nu$

$\omega_\mu = \Lambda^\nu_\mu \ \omega'_\nu$

On peut appliquer ces transformations de changement de bases aux tenseurs quelconques.

3.2 Changement de base d'un tenseur

Soit $\mathcal{B} = (e_\mu)$ et $\mathcal{B}' = (e'_\mu)$ deux bases de E supposons que l'expression du tenseur T dans la base $\mathcal{B}$ est:

$T = T^{\nu_1,\nu_2,...\nu_p}{}_{\mu_1,\mu_2,...\mu_q} e_{\nu_1} \otimes ... \otimes e_{\nu_p} \otimes e^{\mu_1} \otimes ... \otimes e^{\mu_q}$

et que l'expression du tenseur T dans la base $\mathcal{B}'$ est:

$T = T'^{\nu_1,\nu_2,...\nu_p}{}'_{\mu_1,\mu_2,...\mu_q} e'_{\nu_1} \otimes ... \otimes e'_{\nu_p} \otimes e'^{\mu_1} \otimes ... \otimes e'^{\mu_q}$ Alors :

$T^{\nu_1,\nu_2,...\nu_p}{}'_{\mu_1,\mu_2,...\mu_q} = \Lambda^{\nu_1}{}_{\rho_1} \ ... \ \Lambda^{p}{}_{\rho_p} L^{\sigma_1}{}_{\nu_1} \ ... \ L^{\sigma_q}{}_{\nu_q} T^{\rho_1,\rho_2,...\rho_p}{}_{\sigma_1,\sigma_2,...\sigma_p}$

4 Opérations sur les tenseurs

4.1 Produit tensoriel de deux tenseurs

L'addition et la multiplication d'un tenseur sont faciles à définir (structure d'espace vectoriel d'un produit tensoriel de E et E^*) le produit tensoriel de deux tenseurs n'est pas plus difficile à définir on a par exemple en posant:

$U = u^{ij}{}_k \ e_i \otimes e_j \otimes e^k$

$V = v^i{}_j \ e_i \otimes e^j$

Le produit tensoriel $U \otimes V$ est:

$T = t^{ij}{}_k{}^l{}_m \ e_i \otimes e_j \otimes e^k \otimes e_l \otimes e^m = u^{ij}{}_k v^l{}_m \ e_i \otimes e_j \otimes e^k \otimes e_l \otimes e^m$

4.2 Contraction d'un tenseur

Considérons par exemple le tenseur : $U = u^{ij}{}_k{}^l{}_m \ e_i \otimes e_j \otimes e^k \otimes e_l \otimes e^m$.

Pour contracter ce tenseur il faut choisir deux indices de variance différentes i et k par exemple:

Dire que l'on contracte le tenseur en i et k c'est dire qu'on fait la somme des termes ayant mêmes indices i et k. Le tenseur ainsi contracté s'ecrit alors en notation d'Einstein: $u^{ij}{}_i{}^l{}_m$

On obtient alors un nouveau tenseur: $w^{jl}{}_m = u^{ij}{}_i{}^l{}_m$

Remarque l'opération de contraction est tensorielle.

4.3 Formes bilinéaires , tenseur métrique

Soit E_n, un espace vectoriel de dimension n Si on résume certains resultats précédent, on peut remarquer que toute forme bilinéaire peut être décomposée en produit tensoriel de formes linéaires, mieux les $e_i^* \otimes e_j^*$ quand i et j vont de 1 à n. En effet par exemple pour n=2 pour plus de clarté:

Si b est une forme bilinéaire quelconque sur E_2 on peut montrer en exercice que b s'écrit de manière unique:

$$b = \alpha_{1,1} e_1^* \otimes e_1^* + \alpha_{1,2} e_1^* \otimes e_2^* + \alpha_{2,1} e_2^* \otimes e_1^* + \alpha_{2,2} e_2^* \otimes e_2^*$$

Autrement dit l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$ et $E^* \bigotimes E^*$ sont isomorphes.

Si b est symétrique, on rappelle que b est in produit scalaire. Dans le langage du calcul tensoriel on dit aussi que b est une métrique; on pose plutôt $\alpha_{i,j} = g_{i,j}$ Alors en notation d'Einstein :

$$b = g_{i,j} dx^i \otimes dx^j$$

On définit ainsi le tenseur métrique d'ordre 2 et 2 fois covariant.

4.4 Abaissement d'indice

Soit u un vecteur ses coordonnées contravariantes sont notés u_i Alors on a:

$$u_i = g_{i,j} u^j$$

On dit que l'on a opéré un abaissement d'indice , on peut faire cette manipulation sur n'importe quel tenseur.