CNAM UE MVA 211 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie Cours 8: Notions sur les groupes et algèbre de Lie

Avril 2007

1 Introduction

Il existe une structure intermédiaire entre l'analyse la géométrie et l'algèbre, il sagit des groupes et des algèbres de Lie. Un groupe de lie réunit la structure de variété (géométrie différentielle), et la structure de groupe. L'espace tangent en l'origine définit lui une algèbre de Lie. les groupes et les algèbres de Lies ont une grande importance en physique des particules où la classification des algèbres de Lie prend une place importante. Il est hors de question d'étudier ce sujet en profondeur aussi nous nous limiterons aux d'efinitions essentielles utiles en particulier pour la théorie des fibrés et des connexions.

2 Groupes topologiques et groupes de Lie

Pour faire de l'analyse on est amméner à définir la notion de groupe topologique; on a:

Définition

Un groupe topologique G est un espace topologique séparé muni d'une structure de groupe ultiplicatif telle que la loi de multiplication interne et le passage à l'inverse soit des opérations continues.

Un homomorphisme de groupes topologiques est un homomorphisme de groupe qui est continu.

Définition

Un groupe de Lie, est un groupe topologique G muni d'une structure de variíété différentiable, telle la loi de multiplication interne et le passage à l'inverse sont aussi des applications différentiables.

un homomorphisme de groupe de Lie est alors un homomorphisme de groupe et un homomorphisme de variété diff'erentiable.

Définition

Un sous groupe de Lie H de G est un sous groupe d'un groupe de lie G qui est aussi une sous variété.

Exemples

Le groupe des nombres complexes de module 1 noté $U(1)$, (U pour unité), Ou S^1 pour rappeler la sphère unité de dimension 1 est un groupe de Lie.

Le groupe linéaire réel $Gl(n, \mathbb{R})$ des matrices carrés de taille n inversibles est un groupe de Lie

La plupart des sous groupes du groupe linéaire comme par exemple le groupe orthogonal $O(n)$ sont des groupes de Lie.

3 Algèbre de Lie

Une manière aisée pour fabriquer une algèbre de Lie ou de se la représenter concrètement est de considerer un groupe de Lie et considérer l'espace tangent (qui existe car un groupe de Lie est une variété différentiable) en l'élément neutre (qui existe car un groupe de Lie est un groupe).Donnons maintenant une définition plus abstraite qui se justifie par le fait que les algèbres de Lie sont aussi étudiés pour elle même sans faire réference a un groupe de Lie sous jacent.

Définition

Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel qui peut être considéré de dimension finie, muni d'une multiplication interne appelé crochet de Lie antisymétrique et qui vérifie l'identité de Jacobi:

$[X, Y] = -[Y, X]$

$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Exemple fondamental

On a découvert un exemple d'algèbre de Lie en géométrie différentielle. On a en effet remarqué que l'espace tangent c'est a dire l'espace des dérivations peut être muni d'un produit qui est encore une dérivation à cause du lemme de shwartz. c'est le crochet des dérivations. On rappel que le produit "naif" de deux dérivation n'est bien sur pas une dérivation. Ainsi on a en géométrie différntielle un exemple très concret de ce qu'est une algèbre de Lie.

Un homomorphisme d'algèbre de Lie est une application entre deux algèbre de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que: $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$

Une sous algèbre de Lie est un sous espace vectoriel $\mathfrak{h}$ qui vérifie que pour tout couple de vecteurs X, Y, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Ce dernier résultat s'écrit aussi: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$

Définition

On appelle idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ une sous alèbre de Lie $\mathfrak{h}$ qui vérifie aussi: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$

Définition

On appelle somme directe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$, la somme directe des espaces vectoriels sous jacent qui vérifie de plus pour tout couple de vecteurs X_1, Y_1, et X_2, Y_2 respectivement dans $\mathfrak{h}$ et dans $\mathfrak{g}$: $[X_1 \oplus Y_1, X_2 \oplus Y_2] = [X_1, Y_1] \oplus [X_2, Y_2]$

4 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Comme on a dit, l'étude des algèbre de lie a en soi un grand intéret, mais peut être construite a partir de la définition de groupe de Lie. Cela permet de se représenter géométriquement une algèbre de Lie.

4.1 Champs de vecteurs invariants

Dans un groupe de Lie, comme la multiplication et l'inverse sont différentiable, On peut définir deux difféomorphisme du groupe appellé translation a gauche et translation a droite.

Définition

On appelle translation à gauche (resp. translation à droite) l'application de G dans G, qui à l'element h du groupe associe l'élément noté $L_g(h) = gh$, où g est un autre élément du groupe. (resp. qui à l'element h du groupe associe l'élément noté $R_g(h) = hg$, où g est un autre élément du groupe.)

Définition: invariance à gauche

Soit X un champ de vecteur sur G, On rappelle que l'application tangente à L_g est l'application notée T_aL_g ou L_{g*} de T_aG dans $T_{ga}G$ qui a $X_{|a}$ dans T_aL_g associe $T_aL_gX_{|a}$ dans $T_{ga}G$. Si, $T_aL_gX_{|a} = X_{|ga}$, on dit que ce champ de vecteur est invariant à gauche .

Définition: invariance à droite

Soit X un champ de vecteur sur G, On rappelle que l'application tangente à R_g est l'application notée T_aR_g ou R_{g*} de T_aG dans $T_{ag}G$ qui a $X_{|a}$ dans T_aL_g associe $T_aR_gX_{|a}$ dans $T_{ag}G$. Si, $T_aR_gX_{|a} = X_{|ag}$, on dit que ce champ de vecteur est invariant à droite .

On laisse en exercice démontrer la propriété que si deux champs de vecteurs sont invariants à gauche (ou à droite), leur crochet aussi. On peut maintenant donner la structure d'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie.

4.2 Algèbre de Lie associé a un groupe de Lie

La notion de champs de vecteurs invariants à gauche, ou á droite permet de présenter la notion d'algèbre de lie comme dérivant directement de la notion de groupe de Lie. On choisit les champs de vecteurs invariants à gauche mais on aurait tout aussi bien choisir les champs de vecteurs invariants à droite.

Il est aussi légitime de se demander pourquoi on ne considère pas tous les champs de vecteurs comme pour le cas des variétés. Cela est en partie due a la structure de groupe et le fait que la translation a gauche soit un isomorphisme on peut donc rammener un champ de vecteur définie en g au champ de vecteur définie en l'élément neutre e du groupe G

Définition

On appelle algèbre de Lie du groupe de Lie G, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs invariants à gauche muni du crochet de Lie qui est bien une loi de composition interne. On choisit souvent $a = e$ (où e est l'élément neutre du groupe) comme point de base et l'espace tangent en e comme représentant "canonique" de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. on a alors: $\mathfrak{g}= T_eG$

Exemple

Prenons le groupe de Lie $G = \mathbb{R}$ (exercice montrer que c'est effectivement un groupe de Lie), On peut remarquer que les translations à gauches sont données par: $x \to a + x$. Un champ de vecteur quelconque est donné par $u(x)\frac{\partial}{\partial x}$, Alors, pour que ce champ de vecteurs soit invariants à gauches il faut que $u(x + a) = u(x)$ quel que soit a donc tout champ de vecteurs invariant a gauche doit être proportionnel au champ de vecteur constant soit $\frac{\partial}{\partial x}$.

Exercice

Montrer qu'un champ de vecteur invariant à gauche sur le cercle S^1 est donné par $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$.

4.3 Sous groupe à un paramêtre de difféomorphisme

On rappelle que si X appartient à $\mathfrak{X}(M)$, algèbre des champs de vecteurs sur une variété M, ce champ de vecteur génère un flot et on a la définition:

Définition

Une courbe "lisse" ϕ: $\mathbb{R}$ dans G est appellée sous groupe à un paramètre de difféomorphisme de G si $\phi(t)\phi(s) = \phi(t+s)$.

Cette propriété dit exactement que ϕ est l'exponentielle de quelque chose. On peut vérifier que $\phi(0) = e$, $\phi(t)^{-1} = \phi(-t)$ et il existe un champ de vecteur X qui satisfait l'équation différentielle:

$\frac{d\phi^\mu(t)}{dt} = X^\mu(\phi(t))$

Théorème

Le champ de vecteur issue de l'équation différentielle ci-dessus est invariant à gauche.

Démonstration

Cela résulte simplement de l'invariance à gauche de la dérivée dans $\mathbb{R}$ et de la commutativité des diagrammes ci dessous:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "L_t"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\phi"] \\ G \arrow[r, "L_g"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_0\mathbb{R} \arrow[r, "L_{t*}"] \arrow[d, "\phi_*"'] & T_t\mathbb{R} \arrow[d, "\phi_*"] \\ T_eG \arrow[r, "L_{g*}"] & T_{\phi(t)}G \end{tikzcd}$$

Remarque

On montre réciproquement que si X est un champ de vecteur invariant a gauche, il définit une équation différentielle comme ci-dessus et un groupe à un paramètre de difféomorphisme.

4.4 Application exponentielle