CNAM UE MVA 211 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie Cours 7: Eléments d'algèbre homologique (suite)

Mars 2007

1 Introduction

Nous revenons danc ce cours sur un fait important en topologie et qui doit donc absolument être vérifié en topologie algébtique; une déformation continue ne modifie pas la topologie d'un espace. on a vu par exemple que deux espaces homéomorphes, ont même groupe fondamental, il en est de même si un des espaces est un retract de l'autre. De manière générale il nous faut vérifier que si deux espaces ont "même type d'homotopie" , ils ont la même topologie, la même (co)-homologie. En clair il sont topologiquements indiscernables.On a déjà vu sur des exemples simples que deux complexes simpliciaux homéomorphes ont même groupes d'homologies. nous aimerions dans cet exposé développer un peu ce point de vu.

2 Homotopie, type d'homotopie

Nous avons définie l'homotopie des chemins et des lacets pour pouvoir définir le groupe fondamental. En fait cette notion peut être définie de manière plus générale entre deux espaces topologiques quelconques , on peut etendre la notion d'homotopie au niveau des espaces topologiques et on a la définition:

Définition

Soit f_0, f_1 deux applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique Y. L'application f_0 est homotope à l'application f_1 s'il existe une application continue H appellée homotopie, du produit $X \times I$ dans Y telle que $H(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$ quel que soit x dans X.

Définition: *déformation* d'un espace topologique

Dans la définition précédente, si f_0 est l'application identique id_X et si $X = Y$ on dit que $f_1(X)$ provient d'une déformation continue de X.

par exemple un point provient de la déformation d'un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$. et un résultat fondamental est que l'homologie ou la cohomologie d'un ensemble X sont stable par déformations continues.

Proposition

La relation d'homotopie est une relation d'équivalence dans l'ensemble des applications continues de X à Y.

La demonstration est laissée en exercice, il suffit d'adapté celle vue pour l'homotopie des chemins.

Propriété

La relation d'homotopie est compatible avec la composition des applications: Si f_O, f_1 sont homotopes de X dans Y et si g_O, g_1 sont homotopes de Y dans Z alors $g_0 \circ f_O, g_1 \circ f_1$ sont homotopes de X dans Z.

En effet si F (resp. G) est une homotopie de f_0 à f_1 (resp. de g_0 à g_1 $H : (x, t) \mapsto G(F(x, t), t)$ est une homotopie de $g_0 \circ f_0$ à $g_1 \circ f_1$.$\square$

Définition

On dit que deux espaces X et Y ont même type d'homotopie s'il existe une application continue f de X dans Y et une application continue g de Y dans X telle que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ soient respectivement homotopes aux appliations identiques de X et de Y

Exercice

La relation avoir mˆme type d'homotopie est une relation déquivalence.

Définition

Un espace est dit contractile s'il a même type d'homotopie qu'un point.

Exemples

Par exemple $\mathbb{R}^n$ est contractile. ou plus généralement tout sous espace convexe est contractile.

3 Homotopie des complexes de chaines

On veut adapter les technique d'homotopies au complexes de chaines en genéral. on va tout d'habord voir ce qu'il en est sur l'exemple des complexes simpliciaux.

3.1 Homotopie des complexes simpliciaux

On commence par adapter la définition générale d'homotopie aux cas des complexes simpliciaux. On rappelle qu'un complexe simplicial est un ensemble de simplexes satisfaisant certaines règles et définies dans un chapitre précédent.

Définition

On se donne K et L deuc complexes simpliciaux. soit f et g deux applications continues de K dans L. Alors f et g sont chaine-homotopique si il existe une homotopie F de $K \times I$ dans L qui commute aux bords et vérifie de plus pour tout simplexe σ: $F(\sigma \times \{0\}) = f(\sigma)$ et $F(\sigma \times \{1\}) = g(\sigma)$

Remarque

En particulier si f est l'identitée on dit que $g(\sigma)$ est une déformation continue du simplexe σ.

3.2 Application prisme

On appelle application prisme l'application de $C_p(K)$ dans $C_{p+1}(K \times I)$ qui a tout p-simplexe σ associe le $(p+1)$-simplexe $\sigma \times I$ de $C_{p+1}(K \times I)$.

Exemple

si on pose $\sigma = (x_0, x_1)$ alors son prisme est le complexe simplicial constitué d'un seul carré donc la somme de deux triangles orientés:

$$K(\sigma) = (x_0, x_1) \times [0,1] = ((x_0,0),(x_0,1),(x_1,1)) - ((x_0,0),(x_1,0),(x_1,1))$$

Pour simplifier on posera $(x_i, 0) = a_i$, $(x_i, 1) = b_i$

3.3 bord d'un prisme

C'est simplement le bord du complexe simplicial attribué à ce prisme.on a:

$$\partial K(\sigma) = \sigma \times \{1\} - \sigma \times \{0\} - \partial(\sigma) \times I.$$

Qui s'ecrit aussi:

$$\partial K(\sigma) = \sigma \times \{1\} - \sigma \times \{0\} - K(\partial(\sigma)).$$

Exemple

On reprend l'exemple précédent:

$$\partial K(a_0, a_1) = \partial((a_0, b_0, b_1) - (a_0, a_1, b_1)) =$$
$$(b_0, b_1) - (a_0, b_1) + (a_0, b_0) - (a_1, b_1) + (a_0, b_1) - (a_0, a_1) =$$
$$(b_0, b_1) - (a_0, a_1) + (a_0, b_0) - (a_1, b_1)$$

Théorème

Si f et g sont deux fonctions chaine-homotopique du complexe K vers le complexe L, il existe un application D_p de $C_p(K)$ dans $C_{p+1}(L)$ qui satisfait $\partial D_{p+1} + D_p \partial = f - g$

Démonstration

Il suffit de former la composée des applications:

$C_p(K) \xrightarrow{K_p} C_{p+1}(K \times I) \xrightarrow{F} C_{p+1}(L)$

On a alors:

$\partial F(K_{p+1}(\sigma)) = F(\partial K_p(\sigma)) = F(\sigma \times \{1\} - \sigma \times \{0\} - \partial(\sigma) \times I) =$

$F(\sigma \times \{1\}) - F(\sigma \times \{0\}) - F(\partial(\sigma) \times I) =$

$f(\sigma) - g(\sigma) - F(\partial(\sigma) \times I)=$

$f(\sigma) - g(\sigma) - F(K_p(\partial(\sigma))$

Il faut donc de choisir $D_p = F \circ K_p$

Représentation sous forme de diagramme

On représente usuellement une relation d'homotopie entre deux complexes par le diagramme suivant qui (attention) n'est pas commutatif à cause des deux flêches du milieu.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{n+1}(K) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] & C_n(K) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "K_n"'] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] & C_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[dl, "K_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] & {} \\
{} \arrow[r] & C_{n+1}(K \times I) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(K \times I) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(K \times I) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Ici i est l'application de K dans $K \times I$ qui a un simplexe σ associe $\sigma \times \{0\}$ base du prisme. et i' est l'application de K dans $K \times I$ qui a un simplexe σ associe $\sigma \times \{1\}$ sommet du prisme.

On a bien: $\partial K_{n+1}(\sigma) = \sigma \times \{1\} - \sigma \times \{0\} - K_n(\partial(\sigma))$. soit:

$\partial K_{n+1}(\sigma) + K_n(\partial(\sigma)) = i(\sigma) - i'(\sigma)$.

On peut alors donner le diagramme suivant dans lequel la restriction aux deux dernières lignes sont commutatives:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{n+1}(K) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] & C_n(K) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] \arrow[dl, "K_n"'] & C_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "i"'] \arrow[d, shift left, "i'"] \arrow[dl, "K_{n-1}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & C_{n+1}(K \times I) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "F"'] & C_n(K \times I) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "F"'] & C_{n-1}(K \times I) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & {} \\
{} \arrow[r] & C_{n+1}(L) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(L) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(L) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

On voit alors clairement que l'homotopie nécessite de "prismer" le complexe de départ. La commutativit'e de la rstriction aux deux dernières lignes permet d'effacer la ligne de calculs intermédiaires alors:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & C_{n+1}(K) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & C_n(K) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl, "D_n"'] & C_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl, "D_{n-1}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & C_{n+1}(L) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(L) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(L) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

On a la relation :$\partial D_{n+1}(\sigma) + D_n(\partial(\sigma)) = f(\sigma) - g(\sigma)$.

On a toujours la même remarque:

Remarque

Si f est l'application identique on dit que $g(\sigma)$ est une déformation continue du simplexe σ.

Exercice

On considère le complexe simplicial $K = \{0, 1, (0, 1)\}$
1) Regarder le complexe associé et "son prisme"
2) Donner un sens à $\partial K_{n+1}(\sigma) + K_n(\partial(\sigma)) = i(\sigma) - i'(\sigma)$.
3) Etudier la déformation transformant 0 en 1 et 1 en 0

Théorème

si f et g sont homotopes de K dans L alors sont toutes deux chaine-homotopique, alors $f_* = g_*$

Demonstation

En effet si σ est un cycle $\partial D_{n+1}(\sigma) = f(\sigma) - g(\sigma)$ donc $[f(\sigma)] = [g(\sigma)]$ dans $H_n(L)$.$\square$

Corollaire

si f et id_K sont homotopes de K dans K alors sont toutes deux chaine-homotopique, alors $f_* = (id_K)_*$. Cela veut dire que f est une déformation de K, donc l'homotopie de K est celle de $f(K)_*$.

Théorème

Si K et L ont même type d'homotopie, l'homotopie de K est l'homotopie de L.

Ce que nous avons exposé dans le cadre de l'homologie simpliciale se géneralise a l'homologie singulière et plus généralement à toute théorie homologique ou cohomologique.

3.4 Généralisation : homotopie d'un complexe de chaine

La robustesse d'une théorie homologique face a l'homotopie, et aux déformations des complexes de chaines en géneral est fondamentale pour axiomatiser une théorie homologique est fondamentale. on considère donc deux morphismes f et g entre deux complexes de chaines donnés par (A_*, ∂_*), (B_*, ∂_*):

$$... \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} ...$$

$$... \longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} B_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} ...$$

On rappelle que f est un morphisme de complexe de chaines $f : A \to B$ quand quel que soit l'entier n, $f \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ f$.

Cela entraine la commutativité du diagramme ci dessous:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\partial_{n+2}"] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f"'] & A_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f"'] & A_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f"'] & {} \\
{} \arrow[r, "\partial_{n+2}"] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & B_n \arrow[r, "\partial_n"] & B_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] & {}
\end{tikzcd}$$

On à alors la définition:

Définition

Une homotopie entre f et g est une suite de morphismes de modules $(K_n : A_n \to B_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient: $\partial K_{n+1} + K_n \partial = f - g$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & A_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "K_n"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & A_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "K_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & {} \\
{} \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & B_n \arrow[r, "\partial_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Les Théorémes précedents se généralise.

4 Conclusion: théorie axiomatique de l'homologie

Vers les années 50 est née des reflections d'Eilenberg de Steenrod et de Cartan l'aximatisation de la théorie de l'homologie. Par ailleurs, Cartan a consacrer durant l'année scolaire $1948 - 1949$ le premier tôme de son celèbre séminaire à la mise en forme topologie algébrique. On part d'une paire d'espaces topologiques (X, Y) qui nous a servie pour définir l'homologie relative. Voici les axiomes d'une théorie homologique.

4.1 Les axiomes de l'homologie

le premier axiome rend hommage à l'homotopie:

Invariance par homotopie

Si f et g sont des applications homotopes, alors $f_* = g_*$

Le deuxième axiome postule l'existence d'un opérateur de connexion (ou opérateur de bord):

Existence d'opérateur de connexion

Il existe pour tout entier n strictement positif, il existe un morphisme (de connexion) $\delta_n : H_n(X, Y) \to H_{n-1}(Y)$ "fonctoriel" tel que l'on puisse définir une longue suite exacte à partir de la suite exacte courte d'inclusions :
$0 \longrightarrow C_p(Y) \xrightarrow{i_p} C_p(X) \xrightarrow{j_p} C_p(X, Y) \longrightarrow 0$

Le troisième axiome est l'axiome d'excision qui indique que l'homologie relative est inchangée si on excise Y

Excision

on a $H(X, Y) = H(X/Y, Y/Y)$

Enfin on a l'axiome de normalisation:

Normalisation

Si X est réduit à un point son homologie est l'homologie simpliciale du point.

4.2 Conclusion sur la topologie algébrique

La topologie algébrique depuis Cartan et Eilenberg s'est beaucoup développée. Elle est devenue très abstraites et nécessite de nombreux outils théorique comme le maitrise du langage des catégories. Elle se ramifie dans de nombreuses branches des mathématiques comme la topologie différentielle, ou la géométrie algébrique. Les principales disciplines sont la théorie de l'homotopie, la K- Théorie topologique et algébrique. Elle est d'une importance capitale en physique mathématique, théorie des cordes par exemple où les catégories dérivées ont faites leurs apparition par exemple pour l'etude de la symétrie miroir des branes. Nous espérons avoir donné ici une approche motivante pour des études ultérieures.