

CNAM UE MVA 211 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie Cours 6:
Eléments d'algèbre homologique

Mars 2007

1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons calculés avec les moyens du bord certain groupes d'homologies de cohomologies. Déjà, lorsque nous avons exposés des rudiments de théorie de l'homotopie, nous avons introduit la longue suite exacte d'une fibration. Cette suite exacte longue permet d'obtenir certains groupes d'homotopies qu'il aurait été plus difficile d'obtenir de manière directe. Par exemple ce fut le cas pour le troisième groupe d'homotopie de la sphère S^2 . On peut développer considérablement les outils de calculs dans le cadre de l'homologie. L'homologie se révèle très calculatoire, à partir de suite exactes courtes comme l'excision ou la suite de Mayer-Vietoris (qui ressemble dans le cadre homotopique au théorème de Van Kampen mais est beaucoup plus puissante) On peut définir des suites exactes longues d'homologie qui donnent de nombreux résultats. Nous allons survoler quelques unes de ces techniques classiques de calcul d'homologie. c'est ce qu'on appelle l'algèbre homologique.

2 Longue suite exacte d'homologie (ou cohomologie)

Tout d'abord, il faut prendre un point de vu et si tenir quand on définit l'algèbre homologique on peut prendre une présentation homologique, ou bien

a partir du complexe adjoint une pr'ésentation cohomologique. on choisit une fois pour toute la présentation homologique.

On a mentioner l'existence d'une longue suite exacte d'une fibration pour le calcul des groupes d'homotopies en théorie de l'homotopie; on peut montrer l'existence de suite exacte longue en homologie. Plus précisément, on va définir ce qu'on appelle une suite exacte courte de complexes de chaines puis cela nous permettra de construire une suite exacte longue en homologie permettant de calculer des groupes d'homologies à partir d'opération tels les recouvrement par deux ouverts d'une variété : suite de Mayer Vietoris, ou par des opérations chirurgicales telles l'excision.

2.1 Morphisme de complexe de chaines

Considérons deux complexes de chaines (A_*, ∂_*) , (B_*, ∂_*) :

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n \xrightarrow{\partial_n} A_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \\ \dots &\longrightarrow B_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} B_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \end{aligned}$$

On dit que f est un morphisme de complexe de chaines $f : A \rightarrow B$ quand quel que soit l'entier n , $f \circ \partial_{n+1} = \partial_{n+1} \circ f$ Cela entraîne la commutativité du diagramme ci dessous:

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{\partial_{n+2}} & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \\ & f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & \\ \xrightarrow{\partial_{n+2}} & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} \end{array}$$

Théorème

Un morphisme de complexe de chaines f induit un morphisme f_* en homologie, en effet, tout d'abord ce morphisme envoie un cycle sur un cycle et un bord sur un bord (simple consequence de la comutativité du diagramme ci dessus). Maintenant soit c un cycle de A_n , $[c]$ un element de $H_n(A)$ alors, soit c' un cycle homologue a c , $c' = c + \partial_{n+1}c_{n+1}$ mais l'image par f de c' est dans $H_n(B)$ car $f(c)$ est un cycle de B_n et $f(\partial_{n+1}c_{n+1})$ est un bord de B_n

□

On vient de définir une flèche entre groupes d'homologies:

$f_* : H_n(A) \rightarrow H_n(B)$ définie pour tout n

2.2 Suite exacte courte de complexe de chaines

On considère trois complexes de chaines (A_*, ∂_*) , (B_*, ∂_*) , (C_*, ∂_*) :

on suppose que quel que soit l'entier n la suite:

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f} B_n \xrightarrow{g} C_n \longrightarrow 0$$

est exacte. Alors on peut envisager le complexe double ci dessous:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & B_{n+1} & \xrightarrow{g} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f} & B_n & \xrightarrow{g} & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{f} & B_{n-1} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On vient donc de définir deux morphismes de chaines. On a donc pour tout entier n la suite de morphisme en homologie:

$$H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C)$$

Lemme du serpent

Il existe un homomorphisme de connexion noté δ qui transforme la suite de morphismes précédent en une suite exacte longue, autrement dit on a la flèche: $H_n(C) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A)$. Ce lemme est souvent appelé lemme du serpent (ou snake lemma en anglais) l'homomorphisme de connexion est cruciale il permet de lier entre eux tous les groupes d'homologie des complexes (A_*, ∂_*) , (B_*, ∂_*) , (C_*, ∂_*) en une longue suite exacte:

$$\dots H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_*} \dots$$

Une écriture condensée de cette longue suite exacte, est un diagramme sous forme d'un triangle exacte comme ci dessous:

$$\begin{array}{ccc}
 H_*(A) & \xrightarrow{f_*} & H_*(B) \\
 & \searrow \delta & \swarrow g_* \\
 & H_*(C) &
 \end{array}$$

Nous allons donner un démonstration de ce lemme.

Il y a deux chose à établir: l'existence du morphisme de connexion δ entre l'homologie de A et l'homologie de C puis détablir l'exactitude aux différents points de la suite.

Démonstration du Lemme

1) On commence par construire le morphisme de connexion: on va parcourir une partie du complexe double défini ci dessus, on choisit c un cycle de C_n , on va lui associer un cycle a de A_{n-1} , il faudra ensuite vérifier que cette opération peut se faire modulo un bord c'est a dire passe en homologie:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & B_{n+1} & \xrightarrow{g} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f} & b \in B_n & \xrightarrow{g} & c \in C_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & a \in A_{n-1} & \xrightarrow{f} & \partial b \in B_{n-1} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-2} & \xrightarrow{f} & B_{n-2} & \xrightarrow{g} & C_{n-2} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Comme l'application g est surjective, il existe $b \in B_n$ tel que $g(b) = c$; D'autre part, on considère $\partial b \in B_{n-1}$, on a $g(\partial b) = \partial g(b) = \partial c = 0$ car c est un cycle. Enfin par exactitude, il existe $a \in A_{n-1}$ tel que $f_{n-1}(a) = \partial b$ On pose alors: $\delta[c] = [a]$

Il faut vérifier que cette définition est consistante, en particulier que a est un cycle il faut continuer un peu la chasse au diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & B_{n+1} & \xrightarrow{g} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f} & \underline{b \in B_n} & \xrightarrow{g} & \underline{c \in C_n} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{a \in A_{n-1}} & \xrightarrow{f} & \underline{\partial b \in B_{n-1}} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{\partial a \in A_{n-2}} & \xrightarrow{f} & B_{n-2} & \xrightarrow{g} & C_{n-2} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On voit que a est bien un cycle car par la commutativité du diagramme, $f(\partial a) = \partial f(a) = \partial \partial b = 0$, comme f est injective on a bien $\partial a = 0$.

Il faut enfin montrer que $[a]$ ne dépend pas du représentant c de $[c]$ donc aussi de b et a . en effet choisissons d'autres représentants (c', b', a') , $[c'] = [c]$, on a donc $c' - c = \partial c''$ avec $c'' \in C_{n+1}$, soit $b'' \in C_{n+1}$ tel que $c'' = g(b'')$ qui existe par surjectivité:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & \underline{b'' \in B_{n+1}} & \xrightarrow{g} & \underline{c'' \in C_{n+1}} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{a'' \in A_n} & \xrightarrow{f} & \underline{b \in B_n} & \xrightarrow{g} & \underline{c \in C_n} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{a \in A_{n-1}} & \xrightarrow{f} & \underline{\partial b \in B_{n-1}} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{\partial a \in A_{n-2}} & \xrightarrow{f} & B_{n-2} & \xrightarrow{g} & C_{n-2} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Alors $g(b' - b - \partial b'') = c' - c - \partial c'' = 0$ et il existe $a'' \in A_n$ par exactitude, tel que $f_n(a'') = b' - b - \partial b''$.

Mais $f(a' - a - \partial a'') = \partial b' - \partial b + f(\partial a'') = \partial b' - \partial b + \partial f(a'')$

Donc $f(a' - a - \partial a'') = \partial \partial b'' = 0$

Enfin par injectivité de f on trouve que $a' = a + \partial a''$ soit $[a'] = [a]$. On vient de montrer que l'homomorphisme de connexion δ est une application bien définie en cohomologie. \square

2) Montrons maintenant l'exactitude de la suite d'homologie.

On reprend la longue suite exacte d'homologie (maintenant δ existe).

$$\dots H_n(A) \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_*} \dots$$

• Verification de l'exactitude "au milieu" (au point $H_n(B)$).

$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$. En effet comme on a une suite exacte courte de complexes, si $a \in A_n$ alors $f(a) \in \text{Im} f$ donc $g(f(a)) = 0$, alors $g(f(a + \partial a')) = 0$. On voit donc que $\text{im} f_* \subset \text{im} g_*$. Réciproquement soit $[b]$ un élément de $\text{ker} g_*$ alors, $g_*([b]) = [g(b)] = 0$, et il existe c dans C_{n+1} tel que $g(b) = \partial c$. Par surjectivité de g , il existe b' dans B_{n+1} tel que $c = g(b')$: $g(b) = \partial g(b')$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & b' \in B_{n+1} & \xrightarrow{g} & c \in C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & a \in A_n & \xrightarrow{f} & b \in B_n & \xrightarrow{g} & C_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \partial \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \partial a \in A_{n-1} & \xrightarrow{f} & B_{n-1} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Il est donc clair par commutativité du diagramme ($g\partial(b') = \partial g(b')$) que $g(b - \partial b') = 0$, par exactitude il existe $a \in A_n$ tel que $f(a) = b - \partial b'$, de plus comme b est un cycle, a aussi: $f(\partial a) = \partial(f(a)) = \partial(b - \partial b') = 0$. finalement $f_*([a]) = [f(a)] = [b]$ et $[b] \in \text{im} f_*$

- Verifions maintenant l'exactitude en $H_n(C)$

Montrons que $img_* \subset ker\delta$, si b est un cycle de B_n , par construction de δ on a: $\delta([g(b)]) = [a]$ où $f(a) = \partial b$ et comme b est un cycle et f injective, on a donc $\partial \circ g_* = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{a \in A_{n+1}} & \xrightarrow{f} & \underline{\partial b \in B_{n+1}} & \xrightarrow{g} & C_{n+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f} & \underline{b \in B_n} & \xrightarrow{g} & C_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{f} & B_{n-1} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} \longrightarrow 0
\end{array}$$

Réciproquement, on $ker\delta \subset img_*$, en effet, soit c un n -cycle de C , tel que $\delta([c]) = 0$; il existe par construction $b \in B_n$ et $a \in A_{n-1}$ tel que $c = g(b)$

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & B_{n+1} & \xrightarrow{g} & C_{n+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 & \longrightarrow & \underline{a' \in A_n} & \xrightarrow{f} & \underline{b \in B_n} & \xrightarrow{g} & \underline{c \in C_n} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
0 & \longrightarrow & \underline{a \in A_{n-1}} & \xrightarrow{f} & B_{n-1} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} \longrightarrow 0
\end{array}$$

et $f(a) = \partial b$ et $[a] = \delta([c]) = 0$. Soit $a' \in A_n$ tel que $a = \partial a'$. On pose $b' = b - f(a')$ c'est un cycle de B_n donc, $g(b') = c$, donc $g_*([y']) = [c]$ d'où le résultat.

- Vérifions enfin l'exactitude en $H_n(A)$

Soit $a \in A_{n-1}$ tel que $f(a) = \partial b$ pour $b \in B_n$ ($[a]$ est donc dans le noyau de f_* car $f_*([a]) = [\partial b] = 0$), $g(b)$ est un cycle, Alors $\partial g(b) = g(\partial b) = g(f(a)) = 0$ Ainsi, par construction de l'opérateur de connexion on voit que $[a]$ est dans l'image de δ : $[a] = \delta[g(b)]$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_{n+1} & \xrightarrow{f} & B_{n+1} & \xrightarrow{g} & C_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f} & \underline{b \in B_n} & \xrightarrow{g} & \underline{c \in C_n} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{a \in A_{n-1}} & \xrightarrow{f} & \underline{\partial b \in B_{n-1}} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Comme nous l'avons mentionné au début, ce lemme est très utile pour calculer l'homologie ou la cohomologie de toute une collection d'espaces topologiques comme les sphères ou les espaces projectifs. à partir du moment où l'on dispose de suites exactes comme par exemple la suite de Mayer-Vietoris ou la suite d'homologie relative qui sert pour l'excision. Nous allons illustrer ces exemples.

2.3 Exemples de suite exactes longues

Les méthodes développées plus haut dans le cadre homologique peuvent être d'inclines dans le cadre cohomologique. Il suffit de remplacer les complexes de chaînes par des complexes de cochaînes, et des morphismes de complexes de cochaînes et des suites exactes de tels complexes.

Un complexe de cochaîne est donné par (A^*, d_*)

$$\dots \longrightarrow A^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} A^n \xrightarrow{d_n} A^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} \dots$$

Une suite exacte de cochaîne est donné par:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A^{n-1} & \xrightarrow{f} & B^{n-1} & \xrightarrow{g} & C^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & A^n & \xrightarrow{f} & B^n & \xrightarrow{g} & C^n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & A^{n+1} & \xrightarrow{f} & B^{n+1} & \xrightarrow{g} & C^{n+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

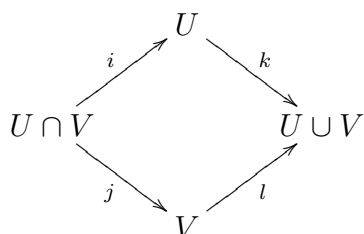
On obtient alors, une suite exacte longue en cohomologie:

$$\dots H^n(A) \xrightarrow{f^*} H^n(B) \xrightarrow{g^*} H^n(C) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(A) \xrightarrow{f^*} H^{n+1}(B) \xrightarrow{g^*} \dots$$

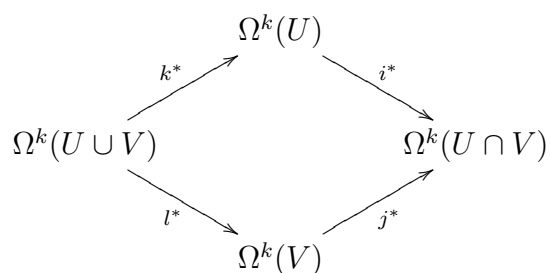
2.3.1 Suite exacte de Mayer-Vietoris

Une méthode pour calculer la cohomologie d'une variété consiste à utiliser un recouvrement par des ouverts. On peut alors définir une cohomologie particulière appelée cohomologie de Čech. Quand on restreint ce recouvrement à deux ouverts on peut déjà calculer des cohomologies à partir de la suite exacte courte de Mayer-Vietoris.

On considère donc le diagramme commutatif ci-dessous où les flèches sont des inclusions:



U et V sont des ouverts recouvrant une variété M . On en déduit le diagramme "pull-back" suivant. Au niveau des formes différentielles on a pour tout degré k :



On en déduit le théorème suivant:

Théorème

Du diagramme commutatif des formes différentielles ci-dessus on déduit la suite exacte de complexes différentiels ci dessous:

$$0 \longrightarrow \Omega^k(U \cup V) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{i^* - j^*} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

avec $k^* \oplus l^*(\omega) = (k^*\omega, l^*\omega)$ et $(i^* - j^*)(\omega, \eta) = i^*\omega - j^*\eta$

Démonstration

Il y a deux chose à démontrer: tout d'abord que les pull back commutent aux dérivations et cela est une simple propriété des formes différentielles. Alors, si la suite ci-dessus est exacte en tout degrés, on a la suite exacte de complexes différentiels ci dessous:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^{k-1}(U \cup V) & \xrightarrow{k^* \oplus l^*} & \Omega^{k-1}(U) \oplus \Omega^{k-1}(V) & \xrightarrow{i^* - j^*} & \Omega^{k-1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^k(U \cup V) & \xrightarrow{k^* \oplus l^*} & \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) & \xrightarrow{i^* - j^*} & \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{k+1}(U \cup V) & \xrightarrow{k^* \oplus l^*} & \Omega^{k+1}(U) \oplus \Omega^{k+1}(V) & \xrightarrow{i^* - j^*} & \Omega^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Montrons maintenant que la suite courte est exacte en tout k :

- Exactitude en $\Omega^k(U \cup V)$

Il suffit de démontrer que $k^* \oplus l^*$ est injective. Choisissons σ un élément de $\Omega^k(U \cup V)$, et $(k^* \oplus l^*)(\sigma) = (\sigma|_U, \sigma|_V) = (0, 0)$ et cela signifie que $\sigma = 0$ d'où le résultat.

- Exactitude en $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$

Tout dabord: $(i^* - j^*) \circ (k^* \oplus l^*)(\sigma) = (i^* - j^*)(\sigma|_U, \sigma|_V) = \sigma|_{U \cap V} - \sigma|_{U \cap V} = 0$
 Donc $Im(k^* \oplus l^*) \subset ker(i^* - j^*)$. réciproquement, considérons (η, η') dans $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ tel que $(i^* - j^*)(\eta, \eta') = 0$; Alors $\eta|_{U \cap V} = \eta'|_{U \cap V}$ Donc il existe une forme globale sur $M = U \cap V$ noté σ égal a η sur U et η' sur V et égale sur l'intersection donc qui se prolonge globalement en σ sur M :
 $(\eta, \eta') = (k^* \oplus l^*)(\sigma)$

- Exactitude en $\Omega^k(U \cap V)$

Il faut montrer que l'application $(i^* - j^*)$ est surjective. Soit ω un élément arbitraire de $\Omega^k(U \cap V)$. Il faut montrer qu'il existe deux formes η et η' respectivement dans $\Omega^k(U)$ et $\Omega^k(V)$ telles que: $\omega = (i^* - j^*)(\eta, \eta') = \eta|_{U \cap V} - \eta'|_{U \cap V}$. Il faut utiliser pour cela une partition de l'unité $\{\phi, \psi\}$ associée au recouvrement ouvert $\{U, V\}$.

Rappelons qu'une partition de l'unité associée au recouvrement ouvert $\{U, V\}$ consiste en deux fonctions $\{\phi, \psi\}$ infiniment lisses sur chaque ouvert vérifiant $\phi + \psi = 1$ sur la réunion des ouverts.

Il faut donc faire le choix suivant:

$$\eta = \psi\omega \text{ sur } U \cap V \text{ et } 0 \text{ sur } U \setminus \text{Supp}\psi$$

$$\eta' = -\phi\omega \text{ sur } U \cap V \text{ et } 0 \text{ sur } V \setminus \text{Supp}\phi$$

On a donc:

$$\eta|_{U \cap V} - \eta'|_{U \cap V} = \psi\omega - (-\phi)\omega = \omega \quad \square$$

Exercice

En utilisant la suite exacte de Mayer Vietoris Calculer directement la cohomologie du cercle S^1 .

2.3.2 Suite exacte d'homologie relative

Une paire d'espaces topologique est un couple (X, Y) . Un morphisme de paires est une application continue $f : X \rightarrow X'$ dont la restriction à Y vérifie : $f(Y) \subset Y'$.

Si $C_p(X)$ désigne comme avant le module des p -chaines singulière sur un espace topologique X , et Y est un sous espace topologique de X , $C_p(Y)$ s'identifie au sous module de $C_p(X)$ de base l'ensemble des p -simplexes singuliers de X à valeur dans Y . de manière évidente le bord $\partial : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ envoie alors $C_p(Y)$ dans $C_{p-1}(Y)$. De plus si $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ est un morphisme de paires alors $f_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X')$ envoie $C_p(Y)$ dans $C_p(Y')$.

Définition

Le complexe des *formes singulières relatives* de (X, Y) est le complexe de chaînes de modules $C_p(X, Y) = C_p(X)/C_p(Y)$ et de morphisme de bord $\partial : C_p(X, Y) \rightarrow C_{p-1}(X, Y)$.

Il faut alors définir les cycles *relatifs* $Z_p(X, Y)$ et les bords relatifs $B_p(X, Y)$. On pose

$$Z_p(X, Y) = \{\sigma \in C_p(X) / \partial\sigma \in C_{p-1}(Y)\}$$

Ainsi on ne garde que cycle de X qui son tués dans $C_{p-1}(Y)$.

$$B_p(X, Y) = B_p(X) + C_p(Y)$$

Ainsi on conserve les bords de X qui ne sont pas des chaînes de Y . Le quotient de ces espaces permet de définir le p -ième groupe d'homologie relative de la paire (X, Y) .

Théorème

Un morphisme de paires $f : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$: induit un morphisme de chaînes $f_p : C_p(X, Y) \rightarrow C_p(X', Y')$. qui lui même induit un morphisme en homologie relative.

Démonstration

Il suffit de s'assurer de la commutativité du diagramme ci-dessous:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_{n+1}(X, Y) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X, Y) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X, Y) & \longrightarrow \\ & f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow & \\ \longrightarrow & C_{n+1}(X', Y') & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X', Y') & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X', Y') & \longrightarrow \end{array}$$

Si σ est dans $C_n(X, Y)$ alors par définition, un cycle équivalent est $\sigma' = \sigma + \sigma_Y$. Et la commutativité résulte du simple fait que $\sigma', \sigma, \sigma_Y$ sont des éléments de $C_n(X)$ particulier et que la dérivation commute par linéarité avec f : $f(\partial\sigma) = f(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f(\sigma)^{(i)} = \partial f\sigma$. \square

Pour finir On pose $X = (X, \emptyset)$ donc $C_p(X) = C_n(X, \emptyset)$ pour tout p entier. Si $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ est l'inclusion, le morphisme induit $j_p : C_p(X, \emptyset) \rightarrow C_p(X, Y)$ s'identifie à la projection canonique $C_p(X) \rightarrow C_p(X, Y)$

Théorème

Si $i : Y \rightarrow X$, $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, Y)$ sont les inclusions Alors on a par construction même la suite exacte courte de complexes:

$$0 \longrightarrow C_p(Y) \xrightarrow{i_p} C_p(X) \xrightarrow{j_p} C_p(X, Y) \longrightarrow 0$$

Démonstration

l'exactitude au point centrale est simple: les chaînes de $C_p(X)$ tuées dans le quotient $C_p(X, Y)$ proviennent exactement du noyau $C_p(Y)$, l'injectivité et la surjectivité de i_p et j_p respectivement est laissée en exercice. \square

Application

Cette dernière suite exacte permet elle aussi de calculer beaucoup de groupes d'homologies. Un cas particulier important est le cas où X est une variété et $Y = \partial X$ son bord.