CNAM UE MVA 211 Ph. Durand Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie Cours 5: L'Homologie singulière, cohomologie de De Rham

Mars 2007

1 Introduction

On a étudié dans un précédent chapitre la cohomologie de De Rham sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et indiqué brièvement comment étendre cela pour la calculer sur une variété. A partir de l'homologie simpliciale, on a vu comment calculer l'homologie d'un simplexe et plus généralement les groupes d'homologie d'un complexe de chaines. Les simplexes (sous ensembles de $\mathbb{R}^n$) servent à paramétrer des variétés. Par exemple, pour paramétrer une courbe fermée et compacte (qui est un variét'e à bord), il suffit de définir une application du segment $[0, 1]$ (cas particulier de simplexe) vers cette courbe. Plus généralement, en définissant des applications d'un simplexe de dimension n dans une variété M de même dimension ou ,plus généralement, dans un espace X, l'image pouvant être singulière ou dégénerée, on définit alors l'homologie singulère. On va montrer quà travers l'homologie singulière, l'homologie simpliciale est en quelque sorte en dualité avec la cohomologie de De Rham. Cela offre deux moyens pour calculer "à la main" des groupes d'homologie ou de cohomologie à coefficients réels par des méthodes différentes.

2 Homologie singulière

Quand on intègre une forme différentielle sur une partie d'une variété on se rammène à calculer une intégrale multiple (éventuellement) sur un domaine (qui peut être, un simplexe) par image réciproque. Cette remarque nous amène à porter un interêt aux applications d'un simplexe dans un espace topologique X (par exemple une variété).

2.1 Définitions, propriétés

Définition

On appelle p-simplexe singulier une application σ d'un simplexe standard de dimension p dans l'espace topologique X:

$\sigma : \Delta_p \to X$

Définition

On appelle i-ième face de σ le $(p-1)$-simplexe singulier défini par:

$\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p : \Delta_{p-1} \to X$

L'application F_i^p est :

$F_i^p : \Delta_{p-1} \to \Delta_p$

C'est la i-ème face de Δ_p.

On peut maintenant définir le bord de σ on à la définition:

Définition

Le bord de σ est donné par:

$\partial_p \sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$

Par linéarité, on définit le groupe des p-chaines singulières de X noté $\mathcal{C}_p(X)$ ainsi que le bord pour toute p-chaine singulière $c = \Sigma_\sigma n_\sigma \sigma$.

Donc, l'opérateur de bord ∂_p définit un homomorphisme de groupe des$(p-1)$-chaines singulière dans le groupe des p-chaines singulière de X et on obtient le complexe:

$$... \longrightarrow \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(X)... \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow 0$$

On a alors comme pour les simplexes simpliciaux $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$. Alors, comme pour l'homologie simpliciale vue au chapitre précédent, on peut définir les cycles et les bords. On définit alors le p-ième groupe d'homologie singulière, soit l'obstuction a ce qu'un p-cycle soit un p-bord.

Définition

Le p-ième groupe d'homologie singulière est donné par: $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$.

Remarque

Un résultat important est que dans le cas ou X est un espace topologique triangulable, on a isomorphisme entre homologie singulière et homologie simpliciale.

3 Couplage entre homologie singulière et co-homologie de De Rham

3.1 Complexe adjoint

A partir d'une théorie homologique on peut construire une théorie duale (ou co-homologique) de manière naturelle. En effet, soit un complexe à valeur dans un groupe G:

$$... \longrightarrow \mathcal{C}_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(X)... \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow 0$$

où ∂ est son application bord , en posant $\mathcal{C}^n(X,G) = Hom(\mathcal{C}_n(X), G)$ On crée un complexe en dualité avec le complexe précédent pour lequel les flèches vont en sens inverse:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(X,G) \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}^1(X,G) \xrightarrow{d_2} \mathcal{C}^2(X,G) ... \xrightarrow{d_n} \mathcal{C}^n(X,G) \longrightarrow ...$$

avec un bord d (on a encore $d^2 = 0$) directement lié au bord ∂ par:

$$\forall f \in \mathcal{C}^n(X,G), \forall c_{n+1} \in \mathcal{C}_{n+1}(X) \colon \ (df)(c_{n+1}) = f(\partial c_{n+1})$$

On peut préférer dans le cas $G = \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_n(X)$, un espace vectoriel, la notation par crochets de dualité: $< df, c_{n+1} >=< f, \partial c_{n+1} >$. Cela fait apparaître que les deux opérateurs, sont adjoints l'un de l'autre, d'où le nom donné au complexe ainsi construit dit complexe adjoint.

3.2 Complexe de De Rham

Le paragraphe précédent décrit une construction naturelle fournissant un couplage non dégeneré "dualité en dimension finie" dans le cas au moins ou l'on considère des espaces vectoriel sur un corps entre l'homologie et la cohomologie. Un théorème non trivial de topologie permet de relier deux théories de topologie algébriques construitent de manière différente. La théorie de l'homologie singulière, à valeur dans le corps des nombres réels, construite à l'aide des images de simplexes dans une variété X et la cohomologie de De-Rham construite à partir des formes différentielles sur la dite variété X. On a pour une variété de dimension n le complexe de De Rham :

$$\Omega_0(X) = \mathcal{C}^\infty(X) \xrightarrow{d} \Omega_1(X) \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} \Omega_n(X) \xrightarrow{d} 0$$

3.2.1 Théorème de De Rham

Le théoréme de De Rham dit que la cohomologie singulière obtenue de manière purement formelle, comme théorie adjointe de l'homologie singulière, est exactement isomorphe à la cohomologie construite par la cohomologie de De Rham. Autrement dit on a un couplage non dégeneré entre homologie singulière et cohomologie de De Rham. Notons $H^*_{DR}(X,\mathbb{R})$ les groupes de cohomologie de De Rham, et $H^*_{sing}(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = H^*_{sing}(X,\mathbb{R})$ les groupes de cohomologie singulière.

Théorème

$\forall n$, $H^n_{DR}(X,\mathbb{R})$ est isomorphe a $H^n_{sing}(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$

3.3 Couplage entre homologie singulière et cohomologie de De Rham

Pour pouvoir définir correctement les objets, il faut rendre les chose lisses (les applications $\sigma : \Delta_p \to M$ de classe C^∞) et les simplexes orientés; alors on peut définir le couplage par: $<\omega, \sigma>= \int_{\Delta_p} \sigma^*\omega$.
$\sigma^*\omega$ est le pull back de ω sur un voisinage de Δ_p. On a alors le théorème de Stokes:

Théorème

$< d\omega, \sigma > = < \omega, \partial\sigma >$

Démonstration

On a $< d\omega, \sigma > = \int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega$

Mais par définition de l'image réciproque d'une forme différentielle il vient:

$\int_{\Delta_p} \sigma^* d\omega = \int_{\Delta_p} d(\sigma^*\omega)$

On peut appliquer alors la formule de Stokes dans $\mathbb{R}^n$ on a:

$\int_{\Delta_p} d(\sigma^*\omega) = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega$

Il nous faut donc intégrer cette forme différentielle sur le bord $\partial\Delta_p$ de Δ_p, or on sait que:

$\partial_p\sigma = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma^{(i)}$ avec $\sigma^{(i)} = \sigma \circ F_i^p$:

$\int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_i^p)^*\omega$

soit:

$\int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\omega = \int_{\Delta_{p-1}} \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\sigma \circ F_i^p)^*\omega = \int_{\Delta_{p-1}}(\partial\sigma)^*\omega$

on a montré: $< d\omega, \sigma > = < \omega, \partial\sigma >$

3.4 Enoncé du théorème de De Rham

Le couplage obtenu précédemment "passe au quotient" et défini un couplage entre les groupes d'homologie-cohomologie et le théorème de De Rham dit exactement que ce couplage est non dégéneré.

3.4.1 Passage au quotient

Il faut montrer que le couplage est indépendant des représentants choisies respectivement dans une classe d'homologie, ou dans une classe de cohomologie.

Donc, en restreignant ce couplage aux formes fermées ($d\omega = 0$) on a:

$< \omega, \sigma + \partial\sigma' > = < \omega, \sigma > + < d\omega, \sigma' > = < \omega, \sigma >$

De même, en restreignant ce couplage aux cycles ($\partial\sigma = 0$):

$< \omega + d\omega', \sigma > = < \omega, \sigma > + < \omega', \partial\sigma' > = < \omega, \sigma >$

Cela permet de définir le couplage en "homologie, cohomologie":‘

$H^p_{DR}(X, \mathbb{R}) \times H^{sing}_p(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

où le deuxième espace est le groupe d'homologie singulière à coefficients réels.

3.4.2 Calcul de groupes d'homologie-cohomologie

Maintenant, par le théorème de De Rham, on dispose de deux moyens pour calculer des groupes d'homologies ou de cohomologies suivant que l'on est plus familier avec les simplexes où avec les formes différentielles. Par exemple, calculons les groupes de cohomologie du cercle de deux manières différentes:

Par la cohomologie de De Rham

Calculons le premier groupe de cohomologie de De Rham par un calcul direct.

Le groupe $H^0_{DR}(S^1, \mathbb{R})$ vaut $\mathbb{R}$.

En effet: $H^0_{DR}(S^1, \mathbb{R}) = \{f \in \Omega^0(S^1) = \mathcal{C}^\infty(S^1)/df = 0\}$

Mais le cercle est connexe donc la fonction est constante.

Par l'homologie singulière

Calculons le deuxième groupe de cohomologie de De Rham en passant par l'homologie singulière:

Le groupe $H_1^{sing}(S^1, \mathbb{Z})$ vaut $\mathbb{Z}$.

En effet, on l'à calculé au chapitre précedent, en tenant compte du fait que le cercle S^1 était triangulable, l'homologie simpliciale est isomorphe a l'homologie singulière, on a donc (par tensorisation par $\mathbb{R}$):

$H_1^{sing}(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R},$. Mais:

$H_1^{sing}(S_1, \mathbb{R})$ est isomorphe à $(H_1^{sing}(S^1, \mathbb{R}))^* = H^1_{sing}(S^1, \mathbb{R})$, premier groupe de cohomologie singulière du cercle, mais par le théoréme de De Rham:

$H^1_{DR}(S^1, \mathbb{R}) \simeq H^1_{sing}(S^1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}.$

Exercice

Calculer $H^*_{DR}(S^n, \mathbb{R})$

3.5 Anneau de cohomologie

On peut définir un produit sur les formes différentielle, le produit exterieur, on rappelle que si $\omega \in \Omega^q(M), \eta \in \Omega^q(M)$:

$d(\omega \wedge \eta] = d\omega) \wedge \eta + (-1)^q \omega \wedge d\eta.$

Donc si ω, η sont deux formes fermé alors $\omega \wedge \eta$ est fermée dans $\Omega^{p+q}(M)$

Alors si $[\omega]$ désigne la classe de cohomologie de ω, on pose par définition:

$[\omega \wedge \eta] = [\omega] \wedge [\eta]$

il faut montrer que cette définition ne depend pas du choix des représentants; en effet si on se restreint aux formes fermées:

$(\omega + d\omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + d\omega' \wedge \eta$

et comme η est fermée:

$(\omega + d\omega') \wedge \eta = \omega \wedge \eta + d(\omega' \wedge \eta)$

Cette définition permet détendre le produit exterieur naturellement aux classes de cohomologies. on d'efinit alors ce qu'on appelle l'anneau de cohomologie.

3.6 formule de Kunneth

On considère maintenant le produit de deux variété M_1, M_2 et on aimerais calculer sa cohomologie en fonction de celle de chacune des variété, il est clair qu'alors $\Omega^*(M_1 \times M_2) = \Omega^*(M_1) \otimes \Omega^*(M_2)$ cela est possible grâce a la formule de Kunneth. En particulier cela permet aussi de démontrer que la caractéristique d'Euler Poincaré du produit de deux varíété est le produit des caract'eristique de chacune des variétés.

On note : ω_i^p une base de $H^p(M_1)$, η_j^p une base de $H^p(M_2)$

Il est evident que $\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p}$ est fermée.

d'autre part cette forme décrit $H^r(M_1 \times M_2)$ montrons que cette forme ne peut être exacte; supposons en effet par l'absurde qu'elle l'est alors on peut écrire:

$\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p} = d(\alpha^{p-1} \wedge \beta^{r-p} + \gamma^p \wedge \delta^{r-p-1}) =$

$d(\alpha^{p-1}) \wedge \beta^{r-p} + (-1)^{p-1}\alpha^{p-1} \wedge d\beta^{r-p} + d(\gamma^p) \wedge \delta^{r-p-1} + (-1)^p \gamma^p \wedge d\delta^{r-p-1}$

Pour des raisons de dimensions on a $\alpha^{p-1} = \delta^{r-p-1} = 0$ et donc leur différentielle aussi. Par suite, $\omega_i^p \wedge \eta_j^{r-p}$ serais nul ce qui est impossible par hypothèse. cette forme diff'erentielle porte donc sa contribution a la cohomologie de $H^r(M_1 \times M_2)$ On peut donc écrire:

$H^r(M_1 \times M_2) = \oplus_{p+q=r} H^p(M_1) \bigotimes H^q(M_2)$

Au niveau des nombres de Betti on a:

$b^r(M_1 \times M_2) = \sum_{p+q=r} b^p(M_1) b^q(M_2)$

Exemple: Calcul de la cohomologie du produit de deux surfaces

On considère deux surfaces S_1 et S_2 et b_0, b_1, b_2, b'_0, b'_1, b'_2 leurs nombres de Betti respectifs et $b"_0, b"_1, b"_2$ les nombres de Betti du produit des variétés.

$\chi(M_1) = b_0 - b_1 + b_2,$

$\chi(M_2) = b'_0 - b'_1 + b'_2,$

$\chi(M_1 \times M_2) = b"_0 - b"_1 + b"_2 - b"_3 + b"_4$

Calculons les nombre de Betti du produit gâce a la formule de Kunneth, il vient:

$b"_0 = b_0 b'_0$

$b"_1 = b_0 b'_1 + b_1 b'_0$

$b"_2 = b_0 b'_2 + b_1 b'_1 + b_2 b'_0$

$b"_3 = b_1 b'_2 + b_2 b'_1$

$b"_4 = b_2 b'_2$

En ce qui concerne la caractéristique D'Euler Poincaré on a par simple vérification:

$\chi(M_1 \times M_2) = \chi(M_1) \times \chi(M_2)$

3.7 dualité de Poincaré

Dans toute cette partie on s'interesse maintenant aux variétés compactes orientables et sans bords (Donc en particulier à "volume" fini. les exemples de bases sont les surfaces orientables sans bord comme la sphère et le tore; en revanche le ruban de Moebus, ou la bouteille de Klein sont exclus.

On prend donc une varété de dimension m et ω dans $H^r(M)$, η dans $H^{m-r(M)}$
On peut intégrer une forme de dégré $dim(M) = m$ sur M on obtient un nombre réel. Cela permet de d'efinir un autre accouplement :

$< \omega, \eta > = \int_M \omega \wedge \eta$

Si on se restreint aux formes fermées cet accouplement passe a la cohomologie grâce à la formule de Stokes $< \omega, \eta + d\eta > = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M \omega \wedge d\eta$

et par "intégration par parties" compte tenu que η est fermée:

$< \omega, \eta + d\eta > = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\omega \wedge \eta)$

En appliquant la formule de Stokes et par le fait que $\partial M = 0$:

$< \omega, \eta + d\eta > = \int_M \omega \wedge \eta + \int_{\partial M} \omega \wedge \eta$

$< \omega, \eta + d\eta > = \int_M \omega \wedge \eta$

On a donc le couplage de $H^r(M) \times H^{m-r}(M) \to \mathbb{R}$.

La théorie des formes harmoniques permet de montrer que ce couplage est non dég'enéré; et on a l'isomorphisme:

$H^r(M) \simeq H^{m-r}(M)$.

On a une symétrie supplementaire au niveau des nombres de Betti: $b_r = b_{m-r}$.