CNAM UE MVA 211 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie Cours 4: L'Homolologie simpliciale

mars 2007

1 Introduction

Comme nous l'avons remarqué, sous l'apparente facilité de définir les groupes d'homotopie, se cache des difficultées pour l'instant insurmontable à les calculer. On ne sait pas le faire en général, mais seulement dans des cas très particuliers. Au contraire le langage de l'algèbre justement appellé homologique s'avère très adapté au calcul des groupes d'homologie et de cohomologie. Un théorème important: le théorème d'Hurewicz jette un pont entre l'homologie et l'homotopie. Pour toutes ces raisons, il nous faut donner les bases de cette théorie desormais classique.Ces théories ont eu ensuite des ramifications dans toutes les mathématiques. On parle ainsi aussi de (co)homologie de groupe, d'algèbre de Lie ou galoisiennes. On applique ces théories aussi bien en théorie des nombres en physique ou même en informatique théorique. On donne dans ce cours les élements d'homologie simpliciale ainsi que le lien avec la topologie combinatoire.

2 Homologie simpliciale

Afin de calculer l'homologie d'un contour, d'une surface, ou plus généralement d'une variété de dimension quelconque, on a l'idée de la trianguler c'est à dire de lui associer un polyèdre d'écomposé en n-faces chacune représentant un n-simplexe élémentaire. Par cette methode, la sphère est vue comme un tétraèdre. On peut ainsi trouver des triangulations du tore et plus généralement de toute surface orientable ou non.

2.1 Simplexe, complexe simplicial

L'élément de base qui va permettre de calculer l'homologie (simpliciale) d'une variété est donc le simplexe. Cela va nous permettre de définir un complexe comme on le fait pour définir la cohomologie de De Rham. Ce complexe comme on le verra, à quelques ajustement près, est le complexe dual de celui obtenu pour la cohomolgie de De Rham.

Définition

On appelle r-simplexe de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble noté σ_r et défini par:

$\sigma_r = \{x \in \mathbb{R}^n / x = \sum_{i=0}^{r} c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} c_i = 1\}$

Les c_i désigne des coordonnées barycentriques. On abrège la notation d'un simplexe en notant $\sigma_r = (p_0, ..., p_r)$

La définition s'avère insuffisante pour définir un complexe simplicial. On a besoin de la notion de simplexe orienté. Cela permettra, entre autre, la définition de bords orientés, si importante pour définir correctement la formule de Stock.

Définition

On appelle r-simplexe orienté associé au simplexe $\sigma_r = (p_0, ..., p_r)$, les classes d'équivalences obtenues en séparant les permutations paires de l'ensemble des sommets des permutations impaires.

L'opération d'orientation permet d'affecter d'un signe plus ou d'un signe moins le simplexe non orienté. Les complexes considérés maintenant sont tous orientés.

Définition

On appelle groupe des r-chaines, le groupe libre engendré par les r-simplexes issus d'un n-simplexe $\sigma_n = (p_0, ..., p_n)$. On note $C_r(K)$ le groupe des r-chaines, quand r varie, l'ensemble de ces groupes forme le complexe simplicial noté K et c'est un complexe au sens de l'algèbre homologique comme on le verra.

Remarque

Un élément de $C_r(K)$ est noté $c = \sum_i c_i \sigma_{r,i}$. La somme est prise sur tout les simplexes de taille r. Le coefficient c_i est un entier relatif, la structure de groupe est facile à mettre en evidence.

2.2 Homologie simpliciale

On considère donc le complexe $\mathcal{C}_.(K)$ associé aux simplexes:

$$... \longrightarrow \mathcal{C}_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \mathcal{C}_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathcal{C}_{n-2}(K) ... \xrightarrow{\partial_0} \mathcal{C}_0(K) \longrightarrow O$$

Soit $\sigma_r = (p_0, p_1, ...p_r)$, un r-simplexe orienté

$$\partial_r \sigma_r = \sum_{i=1}^{r} (-1)^i (p_0, p_1, ..., \hat{p}_i, ...p_r).$$

Théorème

Le complexe simplicial défini précédement est un complexe au sens de l'algèbre homologique : $\partial^2 = 0$.

A partir du complexe précédent on va pouvoir définir l'algèbre homologique. L'homologie va représenter le défaut pour un cycle de ne pas être le bord de quelque chose. Plus précisement on a:

Définition

Un élément de $C_r(K)$ est un r-cycle si et seulement si $\partial_r c = 0$, On note $Z_r(K)$ l'ensemble des r-cycles.

Définition

Un élément de $C_r(K)$ est un r-bord si et seulement si il existe dans $C_{r+1}(K)$ un élément d tel que $c = \partial_{r+1}d$. On note $B_r(K) = Im\partial_{r+1}$ l'ensemble des r-bords et c'est un sous groupe de $C_r(K)$, on peut montrer en revenant a la définition qu'un r-bord est toujours un r-cycle: $B_r(K) \subset Z_r(K)$

Définition

On dit que deux r-cycles sont équivalents si leur différence est un r-bord. On appelle r-ième groupe d'homologie le groupe quotient: $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$.

Le calcul direct de l'homologie d'une variété,à partir de complexes simpliciaux, s'avère vite ardu. On préfére utiliser des moyens déductifs à partir des opérations simples que l'on peut faire sur les espaces topologiques reunion, intersection, produit, on a recour souvent, directement au calcul de l'homologie singulière de la variété. Nous donnons ci-dessous dans des cas simples le calcul de l'homologie par les méthodes simpliciales.

2.3 Calcul de l'homologie de quelques complexes simpliciaux

Nous calculons dans cette partie l'homologie de quelques ensembles simpliciaux triangulant des ensembles topologiques simples.

2.3.1 Homologie du cercle

Considèrons l'ensemble simplicial K_1 défini ci-dessous:

$K_1 = \{p_0, p_1, p_2, (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_2, p_1)\}$

Il est facile de se convaincre que ce complexe simplicial représente la triangulation du cercle. Donnons les groupes de r-chaines associés:

$C_0(K_1) = \{i\langle p_0\rangle + j\langle p_1\rangle + k\langle p_2\rangle/(i, j, k) \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$C_1(K_1) = \{i\langle p_0, p_1\rangle + j\langle p_1, p_2\rangle + k\langle p_2, p_1\rangle/(i, j, k) \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

On a donc le complexe de chaine qui se réduit alors à:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_1(K_1) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(K_1) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Déterminons maintenant les groupes de cycles et les groupes de bords qui permettront de calculer les groupes d'homologies:

Calcul du premier groupe d'homologie

$Z_1(K_1)$ représente le groupe des 1-cycles, c'est à dire les les 1-chaines pour lesquelles le bord de dimension 0 est nul ce qui s'ecrit:

$\partial_1 z = i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) = 0$ ou encore, $\partial_1 z = (k - i)p_0 + (i - j)p_1 + (j - k)p_2 = 0$

comme p_0, p_1, p_2 forment des 0-cycles indépendants on en déduit que :

$i = j = k$. et finalement, $Z_1(K_1) \simeq \mathbb{Z}$.

$B_1(K_1)$ représente le groupe des 1-bords, c'est à dire les les 1-chaines qui bordent un simplexe de dimension 2, or ici, un cycle ne borde jamais un simplexe de dimension 2, car le complexe triangule un cercle qui est un objet à une dimension donc:

$B_1(K_1) \simeq 0$

Comme on a aucun bord de dimension 1, on en déduit que le premier groupe d'homologie est:

$H_1(K_1) = Z_1(K_1)/B_1(K_1) \simeq Z_1(K_1) \simeq \mathbb{Z}$

Calcul de $H_0(K_1)$

Toute 0-chaine est un cycle donc: $Z_0(K_1) \simeq C_0(K_1)$

Calculons les bords: $B_0(K_1)$. On a:

$B_0(K_1) = \{\partial_1(l(p_0p_1) + m(p_1p_2) + n(p_2p_0), l, m, n \in \mathbb{Z}\}$.

$B_0(K_1) = \{(n-l)p_0 + (l-m)p_1 + (m-n)p_2, l, m, n \in \mathbb{Z}\}$.

Mais $(n-l) + (l-m) + ((m-n) = 0$

Donc $B_0(K_1)$ est le noyau de l'homomorphisme allant des 0 cycle dans l'ensemble des entiers relatifs défini par:

$f(ip_0 + jp_1 + kp_2) = i + j + k$

Un résultat d'algèbre classique dit que $Z_0(K_1)/kerf \simeq imf$. Et comme l'image est $\mathbb{Z}$ on déduit que:

$H_0(K_1) = Z_0(K_1)/B_0(K_1) = \mathbb{Z}$

Exercice

Donner une autre triangulation du cercle, montrer que l'homologie est inchangé. De manière générale, si deux espaces triangulables sont homéomorphes, ils ont la même homologie.

2.3.2 Homologie du disque

Considèrons l'ensemble simplicial K_1 défini ci-dessous:

$K_2 = \{p_0, p_1, p_2, (p_0, p_1), (p_1, p_2), (p_2, p_1), (p_0, p_1, p_2)\}$

Il est facile de se convaincre que ce complexe simpliciale représente la triangulation du disque. Donnons les groupes de r-chaines associés:

$C_0(K_2) = \{i(p_0) + j(p_1) + k(p_2)/(i, j, k) \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$C_1(K_2) = \{i(p_0, p_1) + j(p_1, p_2) + k(p_2, p_1)/(i, j, k) \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$C_2(K_2) = \{i(p_0, p_1, p_2)/i \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$

On a donc le complexe de chaine un peu plus long:

$0 \longrightarrow \mathcal{C}_2(K_2) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(K_2) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(K_2) \xrightarrow{\partial_0} 0$

Calcul des groupes d'homologie

Comme pour le cercle:

$H_0(K_2) = \mathbb{Z}$

De même comme pour le cercle, $Z_1(K_2) \simeq \mathbb{Z}$

En revanche, contrairement à l'exemple precèdent, ces cycles bordent le triangle plein, simplexe de dimension 2. Donc tous les cycles sont des bords de deux simplexe c'est à dire que $Z_1(K_2) \simeq B_1(K_2)$ (le premier groupe d'homologie est trivial). Remarque: on peut retouver ce résultat par le calcul direct en dérivant $c = m(p_0, p_1, p_2)$, on a:

$H_1(K_2) = 0$

Parmi les deux chaines : $m(p_0, p_1, p_2)$, le seul 2- cycle est obtenu pour $m = 0$. comme on a pas de 3-simplexes ($B_3(K_2) = 0$), on en déduit que:

$H_2(K_2) = 0$

Il est aisé de calculer de calculer l'homologie d'un point. On trouvera la même que ci-dessus pour le disque. On retrouve une propriété récurente en topologie algébrique. Si R est un retract d'un ensemble A, son homologie tout comme son homotopie est inchangée. On dit quelles groupes d'homologies sont des invariants d'homotopie.

2.3.3 Homologie de la sphère

Considèrons l'ensemble simplicial K_1 défini ci-dessous:

$K_3 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, (p_0, p_1), (p_0, p_2), (p_0, p_3), (p_1, p_2), (p_1, p_3), (p_2, p_3)$

$, (p_0, p_1, p_2), (p_0, p_1, p_3), (p_0, p_2, p_3), (p_1, p_2, p_3)\}$

Il est facile de se convaincre que ce complexe simplicial représente la triangulation de la sphère. Donnons les groupes de r-chaines associés:

$C_0(K_3) = \{i(p_0) + j(p_1) + k(p_2) + l(p_3)/(i, j, k, l \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$C_1(K_3) = \{i(p_0, p_1) + j(p_0, p_2) + k(p_0, p_3) + l(p_1, p_2) + m(p_1, p_3) + n(p_2, p_3)/$

$(i, j, k, l, n, m) \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$C_2(K_2) = \{i(p_0, p_1, p_2) + j(p_0, p_1, p_3) + k(p_0, p_2, p_3) + l(p_0, p_2, p_3)/$

$i, j, k, l \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

On a donc le complexe de chaines :

$0 \longrightarrow \mathcal{C}_2(K_3) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(K_3) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(K_3) \xrightarrow{\partial_0} 0$

Calcul des groupes d'homologie

On remarque sans problème que $Z_0(K_3) \simeq C_0(K_3)$. D'autre part, par un raisonnement identique au cas du cercle, on trouve: $H_0(K_3) \simeq \mathbb{Z}$.

Tout 1-cycle du tetraèdre borde un triangle donc : $H_1(K_3) \simeq 0$.

Pour trouver le deuxième groupe d'homologie, il suffit de chercher quand $\partial_2 z = 0$ on trouve alors $Z_2(K_3) \simeq \mathbb{Z}$ et $H_2(K_3) \simeq \mathbb{Z}$.

On peut former des complexes simpliciaux plus compliqués comme celui du tore ou de la bouteille de Klein ou l'espace projectif $\mathbb{R}P^2$. Ces deux derniers sont non orientables ce qui fait apparaitre un sous groupe de torsion dans le premier groupe d'holonomie. Nous donnons pour terminer cette partie l'homologie simpliciale du tore et de la bouteille de Klein.

2.3.4 Homologie du tore

Le complexe simpliciale du tore s'obtient à partir de la figure suivante:

$$\begin{array}{ccccc} & v & \xrightarrow{b} & v & \\ a & \uparrow & \stackrel{c}{\nearrow} & \uparrow & a \\ & v & \xrightarrow{b} & v & \end{array}$$

Le complexe simplicial est constitué d'un seul sommet v, de trois arêtes a, b, c et des deux triangles plein. .On note U le triangle supérieur, L le triangle inférieur. On a toujours le complexe de chaines :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_2(K_4) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(K_4) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(K_4) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Calcul des groupes d'homologie

Le groupe $H_0(K_4)$ est donné par:

$$H_0(K_4) = ker\partial_0 / Im\partial_1$$

$$ker\partial_0 = C_0(K_4) = i(v) \simeq \mathbb{Z}$$

Les bords sont donnés par l'image de ∂_1 et comme a, b, c sont des cycles, elle est réduite à 0. Finalement $H_0(K_4) \simeq \mathbb{Z}$

Le groupe $H_1(K_4)$ est donné par:

$$H_1(K_4) = ker\partial_1 / Im\partial_2$$

Comme a, b, c sont des cycles, $\partial_1(la + mb + nc) = 0$, donc:

$$ker(\partial_1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Une base peut être donnée par $a, b, a+b-c$. Le dernier cycle est exactemennt l'image de ∂_2, donc il subsiste dans le H_1 uniquement a, b ; $H_1(K_4) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
Le groupe $H_2(K_4)$ est donné par:

$$H_2 K_4) = ker\partial_2 / Im\partial_3$$

On a: $\partial_2(iU + jL) = i\partial_2(U) + j\partial_2(L) = (i + j)(a + b - c) = 0$

Donc $i = -j$ et comme, $Im\partial_3 = 0$, $H_2(K_4) \simeq \mathbb{Z}$

2.3.5 Homologie de la bouteille de Klein

Le complexe simpliciale du tore s'obtient à partir de la figure suivante:

$$\begin{array}{ccccc} & v & \xrightarrow{b} & v & \\ a & \uparrow & \overset{c}{\nearrow} & \downarrow & a \\ & v & \xrightarrow{b} & v & \end{array}$$

Comme pour le tore, complexe simplicial est constitué d'un seul sommet v, de trois arêtes a, b, c et des deux triangles plein; On note U le triangle supérieur, L le triangle inférieur. On a le complexe de chaines :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_2(K_5) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(K_5) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(K_5) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Calcul des groupes d'homologie

Le groupe $H_0(K_5)$ est donné par:

$$H_0(K_5) = ker\partial_0/Im\partial_1$$

$$ker\partial_0 = C_0(K_5) = i(v) \simeq \mathbb{Z}$$

Les bords, sont donnés par l'image de ∂_1 et comme a, b, c sont des cycles elle est reduite à 0. finalement $H_0(K_5) \simeq \mathbb{Z}$

Le groupe $H_1(K_5)$ est donné par:

$$H_1(K_5) = ker\partial_1/Im\partial_2$$

Comme a, b, c sont des cycles, $\partial_1(la + mb + nc) = 0$, donc:

$$ker(\partial_1) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Une base peut être donnée par $(a + b - c)$, $(b - c)$, (a).

Calculons maintenant l'image de ∂_2 il vient:

$$\partial_2(iU + jL) = i\partial_2(U) + j\partial_2(L) = i(a + b - c) + j(-a + b - c)$$

Une autre base pour l'image est donnée par:$(a + b - c)$, $2(b - c))$

Le "deux devant $b - c$ a une importance cruciale, il traduit la torsion: pour obtenir H_1 on tue $(a + b - c)$ ainsi que c modulo 2 il reste:

$H_1(K_5) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$

On laisse au lecteur le soins de démontrer que le deuxième groupe d'homologie est nul.

3 Homologie à coefficients réels, caractéristique d'Euler-Poincaré

On aurait pu définir au lieu des groupes d'homologie, des espaces vectoriels d'homologie, pour cela, il suffisait de définir les chaines, avec comme coefficients des nombres réels. Alors, la dimension des espaces vectoriels d'homologie représente ce que l'on appelle les nombres de Betti. On retrouve alors les résultats de topologie combinatoire en calculant la somme alternée des nombres de Betti la caractéristique d'Euler Poincaré indépendante de la subdivision simpliciale envisagée. Il faut aussi noter qu'en utilisant ce système de coefficients on perd des renseignements.Les groupes de torsions disparaissent : on ne garde que la partie libre des groupes d'homologie, on pert les sous groupes de torsions qui signes les variétés non orientables.

3.1 Cas du tore et de la bouteille de Klein

Les groupes d'homologie dans le cas du tore sont:

$H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_2 = \mathbb{Z}$

Les groupes d'homologie pour la bouteille de Klein sont:

$H_0 = \mathbb{Z}$, $H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $H_2 = 0$

Les espaces d'homologie dans le cas du tore sont:

$H_0 = \mathbb{R}$, $H_1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $H_2 = \mathbb{R}$

Les espaces d'homologie pour la bouteille de Klein sont:

$H_0 = \mathbb{R}$, $H_1 = \mathbb{R}$, $H_2 = 0$

3.2 Lien avec la caractéristique d'Euler-Poincaré

On a vu dans le premier cours que la caractéristique d'Euler poincaré s'obtenait (par exemple pour une surface) en calculant le nombre $\chi(K) = s - a + f$ pour une subdivision polygonale donnée. c'est un invariant qui ne dépend pas de la subdivision polygonale donnée. La subdivision la plus simple est obtenue en utilisant la triangulation de la variété à l'aide de simplexes. En utilisant le complexe simplicial mais cette fois avec des coefficients réels on a le théorème:

Théorème

La caractèristique d'Euler-Poincaré est la somme alterné des nombres de Betti.

Demonstration

Il suffit de la faire dans le cas d'un complexe simpliciale triangulant une surface On a le complexe de chaines :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_2(K) \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{C}_1(K) \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{C}_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

Cette fois ci les groupes d'homologies sont des espaces vectoriels et on utilise des resultats basiques d'algèbre lineaire.

En particulier la dimension de l'espace vectoriel quotient est la différence des dimensions des espaces vectoriels composant ce quotient:

$dim(E/F) = dimE - dimF$

$\beta_0 = dim(C_0(K)/Im(\partial_1)) = dim(C_0(K)) - dim(Im(\partial_1))$

$\beta_1 = dim(Ker(\partial_1)/Im(\partial_2)) = dim(Ker(\partial_1)) - dim(Im(\partial_2))$

$\beta_2 = dim(Ker(\partial_2)/0) = dim(Ker(\partial_1)) - dim(0)$

On trouve bien:

$\chi(K) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = dimC_0(K) - dimC_1(K) + dimC_2(K)$

Remarque c'est a partir de là que la topologie combinatoire devient vraiment algébrique. Les invariants topologiques deviennent des groupes ou des espaces vectoriels on traduit donc um probl'ème de topologie en langage algébrique.