CNAM UE MVA 211 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie Cours 2: Quelques points sur la théorie de l'homotopie I

Fevrier 2007

1 Introduction

Avec la théorie de l'homotopie on entre de plein pied dans le monde de la topologie algébrique. Les briques élémentaires qui composent cette théorie sont assez simples à définir. Cependant elle se révèle très peu calculatoire: il n'existe pas ou peu d'algorithmes pour calculer les groupes d'homotopies de variétés même simple comme la sphère. Si alors on étudie la théorie de l'homotopie c'est pour ses apports à d'autres théories à savoir revêtement fibrations etc.... Il est interessant de savoir que l'on peut tuer des groupes d'homotopies d'une variété differentielle en calculant sont revêtement universel; par exemple chacun sait que le cercle n'est pas contractile (il n'est même pas connexe simplement!) alors que son revêtement universel à savoir la droite réelle l'est. La théorie de l'homotopie est aussi à l'origine de la classification des fibrés a isomorphismes près qui est a la base des espaces classifiants définis par Steenrood. Elle permet de définir de manière élégante quoique abstraite les classes caractéristiques.

2 Rappels sur la connexité, le groupe fondamental

2.1 Connexité

La notion de connexité est une notion importante en topologie. Il existe plusieurs manières pour décrire qu'un ensemble est connexe ou non. Toute ces définitions non équivalentes entre elles ont au moins une propriété commune, point de départ de la définition imagée que l'on donne en topologie générale: un ensemble est connexe si et seulement si il est d'un seul tenant. Cette définition est aussi bien adaptée la théorie des graphes. Un graphe est connexe si partant d'un sommet du graphe on peut joindre tous les autres sommets. Cependant, déjà en théorie des graphes on peut définir une notion plus fine: la k-connexité qui "ressemble" à la k-connexité pour la théorie de l'homotopie on dit qu'un graphe est k-connexe si entre deux sommets quelconque d'un graphe, on le disconnecte en cassant k arêtes.

Définition

Un espace topologique X est dit connexe si et seulement si il n'existe pas de partition de X en deux ouverts disjoints.

Définition

Un espace topologique est dit connexe par arcs si deux quelconques de ses points peuvent être joint par un chemin. Un ensemble peut être connexe sans pour autant être connexe par arcs.

Pour définir des propriétés plus fines de connexités dans le cadre des espaces topologiques, il faut définir les groupes d'homotopies. Disons auparavant que si un espace topologique voit son k-ième groupe d'homotopie comme premier groupe d'homotopie non trivial il sera déclar $k-1$-connexe. Le raffinement ultime est donné par les espaces contractiles. Un espace est contractile (c'est a dire peut se retracter sur un point) s'il est plus connexe que les autres en quelque sorte pas 1-connexe, 2-connexe.... mais infiniment connexe. Un tel espace a tous ses groupes d'homotopies triviaux.

2.2 Homotopie , groupe fondamental

La notion de chemin et de lacet est importante elle permet de définir ce qu'on appelle le groupe fondamental.

Définition

Soit X un espace topologique, on appelle chemin d'origine x_0 et d'extremité x_1 une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ dans X vérifiant $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

Définition

Soit X un espace topologique,on appelle lacet d'origine et d'extremité x_0 une application continue γ de l'intervalle $[0,1]$ dans X vérifiant $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

Définition

On appelle homotopie F d'un lacet γ_1 sur un lacet γ_2 l'action de déformer continûment γ_1 sur γ_2 ce qui s'écrit en posant $I = [0,1]$:

$F : I \times I \longrightarrow X$ définie par:

$F(s,0) = \gamma_1(s)$, $F(s,1) = \gamma_2(s)$

$F(0,t) = F(1,t) = x_0$

Il est aisé de remarquer que la relation d'homotopie sur les lacets est une relation d'équivalence, d'autre part on peut définir une loi de composition interne sur les lacets. Cela définit par passage au quotient un produit sur les classes d'équivalences de lacets homotopes, on demontre que la composition des lacets verifie les axiomes de groupe. On vient de définir le groupe fondamental. On notera γ un lacet, $[\gamma]$ la classe d'homotopie d'un lacet.

Théorème et définition

On verifie que la loi de composition est compatible avec la relation d'équivalence des lacets et définie sur les classes d'équivalence de lacets homotopes un produit qui confère à l'espace quotient une structure de groupe. C'est le groupe fondamental noté $\pi_1(X, x_0)$.

Le point de base choisi dans X n'importe peu: soit x_1 un autre point de X on a $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$

Théorème

Si R est un retract d'un espace topologique X alors $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, r(x_0))$.

Demonstration

La démonstration est aisée considerons un lacet pointé sur x_0, comme R est un retract de X on peut choisir x_0 sur le retract ce qui évitera de le projeter ($r(x_0) = x_0$). Ce lacet (l'application de retraction étant continue) se "retracte sur un lacet de R (l'opération de rétraction réalise une homotopie) et ces deux lacets sont homotopes donc dans la même classe d'homotopie. En clair on peut toujours trouver un "bon representant d'une classe d'homotopie dans le retract.$\square$

Ce théorème a pour conséquence que deux espaces non homéomorphes peuvent avoir des groupes fondamentaux isomorphes. Cela terni un peu l'image de la topologie "algébrique"... On rappelle que l'on a heureusement deux espaces homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes (et c'est pour cela que l'on fait de la topologie algèbrique.)

Théorème

Si X et Y sont deux espaces topologiques, le groupe fondamental du produit $X \times Y$ est $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$.

Ce dernier théorème est lui aussi aisé à demontrer. Il suffit de remarquer qu'un lacet de l'espace produit peut se projeter sur les deux espaces.

A partir des deux résultats précédents on peut déjà calculer pas mal de groupes fondamentaux et déceler des espaces topologiques non homéomorphes.

Exercice

Calculer les groupes fondamentaux des espaces suivants:

$\mathbb{R}^2 - (0,0)$, S^1, T^2, S^2, S^3.

L'exercice précedent montre en outre que S^2, S^3 ont même groupe fondamental, ils ne sont pas pour autant homéomorphes! Donc le groupe fondamental n'est pas suffisant pour séparer des espaces non homéomorphes. Pour s'en sortir il faut définir les groupes d'homotopies supérieurs ce que nous allons faire maintenant.

3 Le théorème de Van Kampen

Le théorème de Van Kampen permet de calculer le groupe fondamental d'une réunion d'espaces topologiques. On considère X un espace topologique réunion des ouverts U et V connexes par arcs et dont l'intersection est elle aussi connexe par arcs.

3.1 Etude d'un exemple: bouquet de cercles

Considerons deux cercles réunis en un point qu'on choisira comme point de base pour simplifier. On peut avoir une idée du groupe fondamental de cet espace topologique. Les lacets sur cet espace se décomposent en composante $a^n, n \in \mathbb{Z}$ de lacets sur le premier cercle et en composante $b^m, m \in \mathbb{Z}$ de lacets sur le deuxième cercle. Ainsi un lacet quelconque est "un mot" sur l'alphabet a, b. Le groupe fondamental représente donc le produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Autrement dit le groupe fondamental du bouquet $S^1 \vee S^1$ est $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1)$.

3.1.1 Remarque

Dans le cas de trois cercles on peut calculer le groupe fondamental à partir de celui des deux premiers et de celui des deux derniers mais il faut identifier les lettres de l'intersection : le cercle du milieux autrement dit,

$$\pi_1(S_1^1 \vee S_2^1 \vee S_3^1) = \pi_1(S_1^1 \vee S_2^1) *_{\pi_1((S_1^1 \vee S_2^1) \cap (S_2^1 \vee S_3^1))} \pi_1(S_2^1 \vee S_3^1)$$

Dans cette écriture $*_{\pi_1((S_1^1 \vee S_2^1)\cap(S_2^1 \vee S_3^1))}$ signifie que l'on quotiente le produit libre: $\pi_1(S_1^1 \vee S_2^1) * \pi_1(S_2^1 \vee S_3^1)$ par la relation d'équivalence qui identifie les éléments de l'intersection.

3.2 Le théorème de Van Kampen

Le cas précédent, bouquet de cercle permet d'intuiter la généralisation qui va suivre:

On considère les espaces U, V, $U \cap V$ connexe par arcs on a alors le théorème (fort):

Théorème

Le groupe fondamentale de la reunion $X = U \cup V$ est $\pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$

On a le théorème plus faible:

Théorème

Si U, V sont simplements connexes, leur réunion aussi.

Pour démontrer ce thèorème, il suffit de montrer que tout lacet sur $X = U \cup V$ peut se décomposer en produit de lacets entièrement dans U ou entièrement dans V.

Démontrons ce dernier théorème:

Demonstration

On rappelle qu'un lacet ou un chemin est une application continue de $[0,1]$ dans $X = U \cup V$, par des arguments simples de topologie et d'algèbre des ensembles on démontre que $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ est un recouvrement de $[0,1]$.

D'autre part, quitte a choisir n assez grand, il est possible de fabriquer un recouvrement de $[0,1]$ par des intervalles fermés $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ tous inclus soit dans $f^{-1}(U)$ soit dans $f^{-1}(V)$.

Maintenant soit c un lacet de X pointé sur x appartenant à la réunion des deux ouverts; on note c_k sa restriction à l'intervalle $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ x_k, x_{k+1} l'origine et l'extremité du chemin construit. Soit γ_k le chemin allant de x à x_k.

On à alors les lacets:

$\varphi_1 = c_1 * \gamma_1^{-1}$

$\varphi_2 = \gamma_1 * c_2 * \gamma_2^{-1}...$

$\varphi_n = \gamma_{n-1} * c_n$

chacun de ces lacets est soit dans U soit dans V par construction, car par ailleurs, chaque chemin γ_k peut être choisi dans l'intersection $U \cap V$ (car elle est connexe par arcs !) donc:

$\varphi_1 * \varphi_2 * ... * \varphi_n = c_1 * \gamma_1^{-1} * \gamma_1 * c_2 * \gamma_2^{-1} * ... * \gamma_{n-1} * c_n$

Soit:

$\varphi_1 * \varphi_2 * ... * \varphi_n = c_1 * c_2 * ...c_n = c$

$\square$

Exercice

Déduire du théorème précedent que la sphère est simplement connexe.

4 Les groupes d'homotopie supérieurs

Une extension de la notion de groupe fondamental donne la notion de groupes d'homotopie supérieurs qui permettent de dicérner plus d' espaces homéomorphes entre eux. Par exemple le groupe fondamental à lui seul ne permet pas de différentier la sphère S^2 et la sphère S^3. Il y a plusieurs moyens pour définir ces groupes par géralisation des lacets en considerant des applications de $I \times I, I \times I \times I.... \to X$, on par récurrence en définissant les espaces de lacets sur X etc.... Toutes ces définitions sont bien sur équivalentes.

On rappelle que l'on peut aussi définir un lacet comme une application continue de $(I, \partial I) \to X$ qui envoie le bord de I sur x_0, point de base de X, où I est l'intervalle $[0, 1]$, on considère donc la généralisation suivante n-lacet ou n-boucle, (n- loops anglais)

4.1 Définitions

On appelle n-boucles une application continue du n-cube I^n dans X qui envoie le bord du n-cube sur le point de base x_0 de X.

Comme pour les lacets, on peut définir une application homotope entre $n - boucles$ on définit alors $\pi_n(X, x_0)$ comme les classes d'équivalences de $n - boucles$. On montre aisement qu'il s'agit aussi d'un groupe.

Théorème et définition

La loi de composition des n-boucles définit sur les classes d'équivalences de n-boucles homotopes un produit, qui confère à l'espace quotient ainsi défini une structure de groupe. C'est le n-groupe d'homotopie de X noté $\pi_n(X, x_0)$.

Le point de base choisi dans X importe peu: soit x_1 un autre point de X on a $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(X, x_1)$

Théorème

Pour $n > 1$ $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe commutatif.

Pour harmoniser l'espaces des n-boucles on complète les groupes d'homotopies en ajoutant $\pi_0(X)$ ensemble des composantes connexes de X et ce n'est en pas un groupe général.

Maintenant donnons un autre définition des groupes d'homotopie supérieurs (Les loops-spaces). Une application de I dans X qui envoie le bord de I sur x_0 peut être vue comme une application du cercle S^1 dans X qui envoie un point choisi de S^1 sur le point de base de X. On note cet espace $[S^1, X]'$, le prime est mis pour le point de base de S^1. Cet espace définit par passage au quotient le groupe fondamentale; de même on peut définir $[S^n, X]'$. et en posant $\Omega X = [S^1, X]'$. Alors $[S^2, X]'$ peut être vu comme $[S^1, \Omega X]'$ etc... on a alors la définition suivante:

Définition

on définit par récurence $\pi_n(X, x_0) = \pi_{n-1}(\Omega X, x_0)$.

4.2 Calcul de groupes d'homotopies supérieurs

On a pour le produit d'espaces topologiques un résultat analogue au groupe fondamental à savoir:

$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0)$.

D'autre part si R est un rétract de X , les deux espaces topologiques ont mêmes groupes d'homotopie supérieurs.

Les deux resultats précédents permettent de calculer $\pi_n(S^n)$. Une application de la sphère dans elle même est caractèrisée par un entier relatif: son degré donc $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$.