CNAM UE MVA 211 Ph. Durand
Algèbre et analyse tensorielle deuxième partie Cours 1: Géométrisation de la physique

fevrier 2007

1 Introduction

En considérant l'univers à quatre dimensions dans lequel nous évoluons, nous avons mis en évidence une modélisation pertinente à grande echelle. Partant du calcul différentiel local, nous avons établi que l'univers macroscopique ést une variété Riemanienne de dimension 4, on pourrait aussi montrer, en incluant le champ électromagnétique, que le groupe de jauge se complique un peu par l'ajout d'une phase, ce qui a pour effet d'ajouter une dimension supplémentaire à l'espace ambiant. L'équation d'Einstein de la relativité générale nous apprend que la courbure globale de l'univers est directement liée à la quantité de matière-énergie qu'il contient. La courbure total est un invariant topologique. La formule de Gauss-Bonnet indique qu'il sagit de l'intégrale d'une classe caractéristique. Dans la deuxième partie de ce cours, nous aimerions montrer combien ce procédé est recurrent dans le processus général de géométrisation de la physique. Nous allons rappeler dans ce cours les outils incontournable de topologie algébrique: Théorie de l'homotopie, de l'homologie et de la cohomologie, des rappels sur la théorie des fibrés et des connections et dégager des invariants topologiques dans les cas les plus simples.

2 Quelques exemples d'invariants topologiques

Nous allons donner dans cette partie quelques invariants topologiques simples: la caractéristique d'Euler-Poincaré qui redonne dans le cas différentiable la formule de Gauss-Bonnet, exemple le plus simple de classe caracteristique, le groupe fondamental d'un espace topologique, les groupes d'homologie.Toutes ces quantités, invariants topologiques, sont invariants au sens suivant. Deux espaces homéomorphes ont le même invariant. Dans le cas de la caractèristique d'Euler Poincaré il s'agit d'un nombre, on dit que l'on fait de la topologie combinatoire. Le groupe fondamental, les groupes d'homologie, comme leurs noms l'indiquent font appel à la structure de groupe ou même de module, et dans le meilleur des cas, d'espace vectoriel. Ce sont des invariants, plus fins que la caractéristique d'Euler-Poincaré, pouvant être vus comme la somme alternée des dimensions des espaces vectoriels d'homologie. En considérant ces invariants plus fins, on fait vraiment de la topologie algébrique.

2.1 La caractéristique d'Euler-Poincaré : Topologie combinatoire

Le nom donné à cet invariant l'est, en hommage à Euler (qui fut le premier à découvrir une propriété topologique liée à la théorie des graphes) et a Poincaré qui a généralisé cette propriété a des espaces topologiques de dimensions supérieures. C'est le premier invariant que nous décrivons car il est à priori le plus simple à définir. Les spécialistes de la théorie des graphes qui font des mathématiques combinatoires le connaissent bien.

2.1.1 Introduction, définition

Considèronn un triangle, un carré ou plus généralement un polygône régulier quelconque inscrit dans un cercle (l'aspect régulier n'ayant d'ailleurs aucune importance) puis calculons le nombre d'arêtes moins le nombre de sommets nous obtenons toujours le même entier. Ce nombre s'appelle la caractéristique d'Euler Poincaré. Si X est un objet uni-dimensionel, on a:

$\chi(X) = s - a$

X est un objet bi-dimensionel on a:

$\chi(X) = s - a + f$

etc...

Dans cette écriture s désigne le nombre de sommets, a le nombre d'arètes et f le nombre de faces. On peut, en outre, remarquer que cet invariant est topologique: il ne dépend pas des déformations subies. En particulier, modulo les déformations, on peut remarquer que le triangles, le carré... etc sont des triangulations différentes du cercle. On en déduit que la caractéristique d'Euler poincaré de tout objet homéomorphe au cercle est constante.On peut dire la même chose pour tout objet homéomorphe aux sphères de dimensions supérieures.

2.1.2 Propriétés algébriques

La caractéristique d'Euler-Poincaré jouit en outre de propriétés calculatoires:

$\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y)$

Ainsi la caractéristique d'Euler Poincaré du tore est nulle.

Si on note # la somme topologique de deux ensembles,

$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2$

On verra en dessous qu'en réalité, on peut retrouver la caractèristique d'Euler Poincaré à partir des nombres de Betti qui représentent la dimension des espaces vectoriels d'homologie.

2.2 Le groupe fondamental, les groupes d'homotopie: Topologie algébrique

L'idée du groupe fondamental et plus généralement des groupes d'homotopie viennent de la quette d'une définition très précise de la notion de connexité. On a déjà rencontré plusieurs notions de connexité dérivant de la définition première de la topologie générale. On distingue dans les cas fins de connexité, connexité par arcs ou de simple connexité. Il existe une autre notion directement liée, comme on le verra, aux groupes d'homotopies de dimension supérieures: c'est la notion de k-connexité. Avant de donner une définition précise de ce quést le groupe fondamental et les groupes d'homotopie de dimensions supérieures, on peut montrer la pertinence de ces objets. $\mathbb{R}$ privé d'un point n'est pas connexe tandis que $\mathbb{R}^2$ privé d'un point, l'est. Autrement dit, il est plus aisé de disconnecter un objet de petite dimension spatiale. Pour voir cela, il suffit de remarquer que l'espace des lacets d'origine x_0 de $\mathbb{R}^2$ privé d'un point, définit un groupe fondamental, qui n'est pas trivial ce qui traduit la non connexité de cet espace de lacets. On dit que le groupe fondamental de $\mathbb{R}^2$, privé d'un point, n'est pas simplement connexe (ou 1- connexe). Il est seulement 0-connexe (connexe par arcs). On peut répéter ce raisonnement pour les dimensions supérieurs pour montrer que $\mathbb{R}^n$, privé d'un point, est n-2 -connexe. Avec un peu d'imagination, on aboutit au résultat suivant: $\mathbb{R}^\infty$ privé d'un point est contractile. On peut dire mieux sur ces invariants: ce sont des invariants d'homotopie. Ainsi, si l'on peut rétracter (écraser) un ensemble sur un autre, les groupes d'homotopie restent inchangés. Par exemple, $\mathbb{R}^2$, privé d'un point se rétracte sur le cercle S^1, on en déduit que S^1 est 0-connexe. On montre de même, que la sphère S^n est n-1-connexe et que la sphère S^∞ est contractile. Nous étudierons quelques points de théorie de l'homotopie dans ce cours.

2.3 Les groupes d'homologie, de cohomologie

On a donné dans la première partie de ce cours, dédié essentiellement au calcul tensoriel, les premiers rudiments de topologie algébrique à travers la cohomologie de De -Rham: on considère les formes differenielles et des groupes (de cohomologie), mesurant l'obstruction ,à ce qu'une forme fermée soit exacte. Nous avons signalé l'existence d'une théorie duale, le trait d'union entre les deux théories étant donné par la formule de Stock. La théorie dont il est question ici, est la théorie de l'homologie singulière. Comme la cohomologie de De Rham, il se trouve que l'homologie singulière est plus facile á calculer il existe des outils d'algèbre homologique permettant de calculer, les groupes d'homologie de manière aisé. On calcul ainsi facilement l'homologie des sphères alors que l'on ne sait toujours pas calculer tous les groupes d'homotopie des sphères. (C'est encore un problème ouvert) Brièvement, on peut dire que les groupes d'homologies mesurent l'obstruction à ce qu'un cycle soit le bord d'un ouvert d'un espace topologique X sur lequel, on calcule l'homologie. Par exemple, dessinons un cercle sur une sphère, il s'agit d'un cycle, or chacun sait qu'il s'agit du bord d'un ouvert de la sphère. Ainsi, le premier groupe d'homologie de la sphère est trivial. Par contre, la sphère, elle même est un cycle mais c'est le bord de la sphère "pleine" qui n'est certainement pas un ouvert de la sphère. Le deuxième groupe d'homologie de la sphère n'est pas trivial. Un exercice simple est de calculer le premier groupe d'homologie du tore. Nous définirons dans un prochain chapitre, l'homologie singulière sur une varieté.

3 Fibrés, connexion, courbure: géometrisation de la physique

Dans une théorie physique, l'espace de configuration souvent une variété, n'est pas considéré de manière isolé. Il est souvent vu comme la base d'une fibration que l'on aime considérer comme triviale au moins localement. L'exemple vu dans la première partie de ce cours est une variété riemanienne ou pseudo-riemanienne cadre de la théorie de la relativité générale. L'espace fibré que l'on considére alors, est le fibré tangent et ces extentions fibré cotangent,... permettant de définir le calcul tensoriel sur une varieté. Le fibré tangent est, en outre, muni d'une metrique, ce qui revient à faire agir un groupe, le groupe orthogonal sur chaque fibres. On définit alors les opérateurs de connexion (de Levi-Civita), de courbure de torsion etc... à partir de ces opérateurs on peut retrouver des invariants topologiques. Par exemple, la caractèristique d'Euler Poincaré provenant de l'intégration d'une classe caractéristique importante la classe d'Euler. Toute cette machinerie peut être développée pour d'autres théories de jauge comme l'électromagnetisme ou la théorie de Yang-Mills à condition d'adopter une théorie des fibrés à d'hoc sur un espace de configuration adaptée et définir la connexions correspondante.

References

[1] M.Audin *Topologie: revêtements et groupe fondamental*, polycopié disponible sur le web.

[2] C. Godbillon *Eléments de topologie algébrique*, Herman, Collection Méthodes.

[3] A. Gramain *Topologie des surfaces*, PUF, Collection Sup Le Mathématicien.

[4] T.Masson *L'homologie et la cohomologie avec exemples*, polycopié disponible sur le web.

[5] T.Masson *Géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, fibrés et connexions*, polycopié disponible sur le web.

[6] M. Nakahara *Geometry, Topology and Physics*, Graduate student series in physics, Taylor Francis.

[7] G. E.Bredon *Topology and Geometry*, Graduate texts in mathematics Springer-Verlag.

[8] C.Kassel *Cent ans de topologie algébrique* polycopié disponible sur le web.

[9] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko *Gométrie contemporaine méhodes et applications* Editions Mir Moscou.