MVA210 - Devoir n°2

à rendre pour le jeudi 14 decembre 2006

Important : Remplissez l'en-tête de tous vos devoirs selon le modèle suivant et mettez la photocopie de votre carte CNAM dans le premier devoir

MVA210	Devoir n° ...
Votre nom et prénom : ...	Votre n° de carte CNAM : ... (*6 chiffres*)
Votre groupe d'ED : ... (*jour, heure, salle*)	Nom de l'enseignant : ...

Exercice 1

On considère dans tout ce paragraphe l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme bilinéaire $b = \Omega_n$ définie par:

$\Omega_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(x_{n+i}y_i - x_iy_{n+i})$

$x = (x_1, ..., x_{2n})$, $y = (y_1, ..., y_{2n})$

on notera $(e_1, ..., e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$

On rappelle que dans un espace vectoriel (E, b) muni d'une forme bilinéaire b l'orthogonal d'un sous espace vectoriel F relativement à b est donné par:

$orth(F) = \{x \in E / \forall y \in F, b(x, y) = 0\}$, on dit que b est **non dégénérée** si et seulement si $orth(E) = \{0\}$.

1°) Donner une expression de Ω_n pour $n = 1, 2$.

2°) Montrer que Ω_1, Ω_2, et plus généralement Ω_n sont antisymétrique.

3°) Montrer que Ω_n est non dégénérée.

4°) Exhiber la matrice J_n telle que Ω_n(x,y)=${}^t x J_n y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 2

Cet exercice est une généralisation du précédent.

Soit W un espace vectoriel réel de dimension n et W^* le dual de W. Sur le produit cartesien $E = W \times W^*$, on considère l'application: Ω définie par $\forall (x, y) \in W$, $\forall \alpha, \beta) \in W^*, \Omega((y, \beta), (x, \alpha)) = \beta(x) - \alpha(y)$.

1°) Montrer que Ω est une forme bilinéaire antisymétrique.

Exercice 3

Une particule de charge q soumise a un champ éléctrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit la force de Lorentz:

$$\overrightarrow{f} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Dans cette expression, $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse de la particule. Nous supposons que les phénomènes électomagnétiques dans un certain référentiel sont déterminés par la connaissance d'un quadripotentiel dont la representation mathématique est une un forme différentielle:

$$A(x,y,z,t) = \frac{V}{c}(x,y,z,t)dt + A_x(x,y,z,t)dx + A_y(x,y,z,t)dy + A_z(x,y,z,t)dz$$

Les composantes $\frac{V}{c}$ A_x, A_y, A_z, sont des fonctions au moins dérivables au premier ordre. $\overrightarrow{A}$ $(A_x,\ A_y,\ A_z)$ est le potentiel vecteur, V le potentiel scalaire.

1°) Donner la dérivée exterieure de cette forme différentielle de degré 1. Les composantes de la deux forme trouvée sont les composantes du champ éléctromagnétique. En deduire:

$$\overrightarrow{E} = grad(\frac{V}{c}) - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B} = rot\overrightarrow{A}$$

Si (E_x, E_y, E_z) et (B_x, B_y, B_z) désignent respectivement les composantes des champ éléctrique et magnétique on pose:

$$F = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_z dy \wedge dx + B_x dz \wedge dy + B_y dz \wedge dx$$

2°) Calculer dF et expliquer pourquoi F est une forme fermée.

3°) En déduire que les équations de Maxwell dans le vide sont: $rot\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

$$div\overrightarrow{B} = 0$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆