MVA210 - Corrigé du devoir n°2

Exercice 1

On considère dans tout ce paragraphe l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{2n}$ muni de la forme bilinéaire $b = \Omega_n$ définie par:

$\Omega_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(x_{n+i}y_i - x_i y_{n+i})$

$x = (x_1, ..., x_{2n})$, $y = (y_1, ..., y_{2n})$

on notera $(e_1, ..., e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$

On rappelle que dans un espace vectoriel (E, b) muni d'une forme bilinéaire b l'orthogonal d'un sous espace vectoriel F relativement à b est donné par:

$orth(F) = \{x \in E/\forall y \in F, b(x, y) = 0\}$, on dit que b est **non dégénérée** si et seulement si $orth(E) = \{0\}$.

1°) Donner une expression de Ω_n pour $n = 1, 2$.

$\mathbf{\Omega_1(x, y)} = x_2y_1 - x_1y_2$

$\mathbf{\Omega_2(x, y)} = x_3y_1 - x_1y_3 + x_4y_2 - x_2y_4$

2°) Montrer que Ω_1, Ω_2, et plus généralement Ω_n sont antisymétrique.

$\mathbf{\Omega_n}$ est antisymetrique :$\mathbf{\Omega_n(x, y)} = -\mathbf{\Omega_n(y, x)}$ verification immédiate.

3°) Montrer que Ω_n est non dégénérée. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2n}, \exists \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{2n}, \mathbf{\Omega_n(x, y)} \neq 0)$.

En choisissant $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_{2n})$ et $\mathbf{y} = (x_{n+1}, ..., x_{2n}, -x_1, ... - x_n)$ avec $\mathbf{x} \neq 0$
On remarque que $\mathbf{\Omega_n(x, y)} > 0$ donc est non dégenérée.

4°) Exhiber la matrice J_n telle que Ω_n(x,y)=${}^t x J_n y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$. **x** et **y** dans $\mathbf{R}^{2n}$, $\mathbf{\Omega_n(x, y)}$= ${}^t\mathbf{x}\ \mathbf{J}\ \mathbf{y}$

On trouve : J =$\left(\begin{array}{cc} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{array}\right)$ et immédiatement: $\mathbf{\Omega_n(x, y)}$= ${}^t\mathbf{x}\ \mathbf{J}\ \mathbf{y}$

Exercice 2

Cet exercice est une généralisation du précédent.

Soit W un espace vectoriel réel de dimension n et W^* le dual de W. Sur le produit cartesien $E = W \times W^*$, on considère l'application: Ω définie par $\forall (x, y) \in W$, $\forall \alpha, \beta) \in W^*, \Omega((y, \beta), (x, \alpha)) = \beta(x) - \alpha(y)$.

1°) Montrer que Ω est une forme bilinéaire antisymétrique.

   On montre simplement que Ω)est antisymetrique, montrons qu'elle est non dégenéré:
   Si $(\mathbf{x}, \alpha)$ non nul alors soit $\mathbf{x} \neq 0$ soit $\alpha \neq 0$
   Si $\alpha = 0$ nécessairement, $\mathbf{x} \neq 0, \exists \beta \in \mathbf{W}^* / \beta(\mathbf{x}) \neq 0$ donc $\boldsymbol{\Omega}((\mathbf{y}, \beta), (\mathbf{x}, \alpha)) = \beta(\mathbf{x}) \neq 0$.
   On discute de même si $\mathbf{x} = 0, \alpha \neq 0$.

Exercice 3

Une particule de charge q soumise a un champ éléctrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit la force de Lorentz:

$$\overrightarrow{f} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

Dans cette expression, $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse de la particule. Nous supposons que les phénomènes électomagnétiques dans un certain référentiel sont déterminés par la connaissance d'un quadripotentiel dont la representation mathématique est une un forme différentielle:

$$A(x, y, z, t) = \tfrac{V}{c}(x, y, z, t)dt + A_x(x, y, z, t)dx + A_y(x, y, z, t)dy + A_z(x, y, z, t)dz$$

Les composantes $\frac{V}{c}$ A_x, A_y, A_z, sont des fonctions au moins dérivables au premier ordre. $\overrightarrow{A}$ (A_x, A_y, A_z) est le potentiel vecteur, V le potentiel scalaire.

1°) Donner la dérivée exterieure de cette forme différentielle de degré 1. Les composantes de la deux forme trouvée sont les composantes du champ éléctromagnétique. En deduire:

$$\overrightarrow{E} = grad(\tfrac{V}{c}) - \tfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B} = rot \overrightarrow{A}$$

   On a: (en posant $A_0 = \frac{V}{c}$)

$$dA = (\tfrac{\partial A_0}{\partial t} - \tfrac{\partial A_x}{\partial t})dx \wedge dt + (\tfrac{\partial A_0}{\partial t} - \tfrac{\partial A_y}{\partial t})dy \wedge dt + (\tfrac{\partial A_0}{\partial t} - \tfrac{\partial A_z}{\partial t})dz \wedge dt$$

$$+ (\tfrac{\partial A_z}{\partial y} - \tfrac{\partial A_y}{\partial z})dy \wedge dz + (\tfrac{\partial A_x}{\partial z} - \tfrac{\partial A_z}{\partial x})dz \wedge dx + (\tfrac{\partial A_y}{\partial x} - \tfrac{\partial A_x}{\partial y})dx \wedge dy$$

   On reconnait donc:

$$\overrightarrow{E} = grad(\tfrac{V}{c}) - \tfrac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{B} = rot \overrightarrow{A}$$

Si (E_x, E_y, E_z) et (B_x, B_y, B_z) désignent respectivement les composantes des champs éléctrique et magnétique on pose:

$$F = E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt + B_z dy \wedge dx + B_x dz \wedge dy + B_y dz \wedge dx$$

2°) Calculer dF et expliquer pourquoi F est une forme fermée.

Le champ 'eléctromagnétique est une forme exacte ($F = dA$) donc $dF = ddA$ $= 0$ on en déduit F est fermée

3°) En déduire que les équations de Maxwell dans le vide sont: $rot\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$

$div\overrightarrow{B} = 0$

$dF = ddA = 0$ s'écrit:

$0 = (\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z})dt \wedge dy \wedge dz + (\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t})dx \wedge dy \wedge dz$

$+ (\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t})dt \wedge dz \wedge dx + (\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t})dt \wedge dx \wedge dy$

La première composante donne la divergence du champ magnétique, les autres viennent compléter les équations de Maxwell dans le vide demandées.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆