MVA010 - Corrigé du devoir n°1

Exercice 1

Soit $X = \{John, Paul, Ringo, George\}$, Soit la famille suivante:
$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{John\}, \{John, Paul\}, \{John, Paul, Ringo, George\}$

1°) On vérifie que $\emptyset$ et les l'ensemble des Beatles au complet, sont des ouverts; une reunion quelconque de sous ensemble de X est dans X; même chose pour l'intersection.On vient de demontrer que l'on peut créer une topologie sur ce groupe pop mythique...

2°) On trouve:
$\mathcal{O}' = \{\emptyset, \{Paul\}, \{Paul, Ringo, George\}$

3°) Montrer que $\mathcal{O}'$ est une famille d'ouverts sur l'ensemble $X \bigcap Y$ est une simple vérification; on vient de définir un cas particulier de topologie induite.

4°) La famille de départ est un ensemble de parties croissantes pour l'inclusion. Si on intersecte la famille de départ avec une partie Y quelconque on obtiendra encore une famille croissante et on vérifie sans mal qu l'on définie toujours une topologie sur Y.

5°) Géneralisation: $(X, \mathcal{O})$ est maintenant un espace topologique quelconque et A une partie de X . Il suffit de remarquer que $(X \cap Y) \cap A = (X \cap A) \cap (Y \cap A)$ et $(X \cup Y) \cap A = (X \cap A) \cup (Y \cap A)$

Exercice 2

On considère la fonction de deux variables définie par:

$f(x, y) = (x + y)\sqrt{x^2 + y^2} sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ si $x^2 + y^2 \neq 0$ et 0 sinon.

1°) Pour montrer que f est continue en l'origine on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; comme $sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ est borné par 1 on déduit que $r(cos\theta + sin\theta).r$ tend vers 0 et l'application est continue à l'origine.

2°) On a :$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} |h| \sin(\dfrac{1}{|h|}) = 0$

On a :$\lim_{k\to 0} \dfrac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k\to 0} |k| \sin(\dfrac{1}{|k|}) = 0$

Donc les dérivées partielles existent et sont nulles en 0.
Il suffit donc de calculer la limite du rapport: $\frac{f(h,k)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ quand $(h, k) \to 0$.
Sa limite est 0 et la fonction est différentiable.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆