le cnam

MVA005 - ED4 - Fonctions réelles d'une variable réelle. Dérivabilité et formule de Taylor

Rappels de cours :

1 - Dérivabilité

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \cup \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable en x_0** si et seulement si la limite à gauche et à droite du taux d'accroissement de f en x_0 existe et est la même :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite et on a alors :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f\,'(x_0) + \varepsilon(x - x_0) \qquad \text{avec } \ \varepsilon(x - x_0) \to 0 \ \text{ quand } x \to x_0 \tag{2}$$

Cela signifie que pour x proche de x_0, on a presque égalité entre $f'(x_0)$ et le taux d'accroissement :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0) \tag{3}$$

ATTENTION : f est dite **non dérivable** en x_0 si :
- les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement en x_0 ne sont pas égales.
- on ne peut calculer qu'une seule des deux limites.

Théorème : Si une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I alors elle est forcément continue sur cet intervalle.

$$\boxed{\textbf{dérivable sur } I \text{ ouvert} \Longrightarrow \textbf{continue sur } I \text{ ouvert}}$$

On en déduit alors la contraposée :

$$\boxed{\textbf{non continue sur } I \text{ ouvert} \Longrightarrow \textbf{non dérivable sur } I \text{ ouvert}}$$

ATTENTION. La réciproque est fausse : $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée $f\,'(x)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Pour $x < 0$, $f\,'(x) = -1$ et pour $x > 0$, $f\,'(x) = 1$. Ainsi en $x = 0$ la dérivée n'est pas définie, donc le domaine de définition de la dérivée f' est $D_{f\,'} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R}^*$.

2 - Formule de Taylor (développement limité d'une fonction)

La formule (2) peut aussi s'écrire :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f\,'(x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x - x_0)}$$

Si on néglige le terme en ε, on dit qu'on a linéarisé la fonction $f(x)$.

La linéarisation est très utilisée dans tous les domaines pour simplifier localement l'étude du comportement d'un phénomène.

Si on veut améliorer cette approximation, et si la fonction est suffisamment dérivable, on utilise une généralisation de cette formule qui est la **formule de Taylor à l'ordre n en x_0** :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) + \ ... \ + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \ \varepsilon(x-x_0)} \qquad (4)$$

Exemple : Soit $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$ et pour tout n on a $f^{(n)}(x) = e^x$ (c.a.d la dérivée nième de e^x est égale à e^x). Donc pour $x_0 = 0$, $f^{(n)}(0) = 1$ et la formule de Taylor s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$$

La linéarisation de e^x au voisinage de $x_0 = 0$ est donc $e^x \simeq 1 + x$. On note alors : $e^x \underset{0}{\simeq} 1 + x$.

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & \text{pour} \quad x \in]-\infty, 1] \\ e^{x-1} & \text{pour} \quad x \in]1, 2] \\ x^2 & \text{pour} \quad x \in]2, +\infty[\end{cases}$

1. Donner le domaine de définition D_f de f.
2. La fonction f est-elle continue en $x = 0$? $x = 1$? $x = 2$?
   Préciser sur quel domaine la fonction est continue.
3. La fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?
   Quel est son domaine de dérivabilité ?

Exercice 2 :

Préciser les fonctions équivalentes au voisinage de 0 des numérateurs et en déduire :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \exp(x)}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x^2 + x}$

Exercice 3 :

On cherche à faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x)$.

1. Donner le domaine de définition D_f de f.
2. Montrer que f est paire et 2π-périodique.
3. D'après le domaine de définition D_f et sachant que f est paire et 2π-périodique, proposer un sous-intervalle I de D_f sur lequel on pourra restreindre l'étude de la fonction f.
4. Étudier la continuité de f sur I.
5. Étudier la dérivabilité de f sur I. En déduire l'ensemble de dérivabilité de f.
6. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Formulaire :
$\tan(x) \underset{0}{\simeq} x + o(x^2)$, $\qquad \tan(x) \underset{\pi}{\simeq} (x-\pi) + o((x-\pi)^2)$, $\qquad \cos(x) \underset{\pi}{\simeq} -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + o((x-\pi)^3)$