MVA005 - ED3 - Fonctions réelles d'une variable réelle. Propriétés, limite et continuité des fonctions

Rappels de cours :

1 - Propriétés des fonctions

- Une **fonction** associe à un élément $x \in \mathbb{R}$ au plus un élément y de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$).
- Le **domaine de définition** est l'ensemble de tous les x pour lesquels on peut calculer $f(x)$.
  Il est noté D_f.
- Une fonction f est à **support borné** si elle est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$ (avec $a,\ b \in \mathbb{R}$).
- Une fonction f est **bornée** si l'ensemble des valeurs $f(x)$ sont bornées c-à-d :
  $\exists\, m,\ M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in D_f,\ m \leq f(x) \leq M$
- **Parité** d'une fonction :
  Avant d'étudier une fonction sur D_f on essaye de réduire le domaine d'étude.

  Si le **domaine D_f est symétrique par rapport à l'origine** c-à-d

  $$\forall x \in D_f \implies -x \in D_f \qquad \text{alors :}$$

  $$\begin{array}{lcccl} f \ \textbf{paire} & \iff & f(-x) = f(x) & \iff & \text{symétrie par rapport à l'axe des ordonnées} \\ f \ \textbf{impaire} & \iff & f(-x) = -f(x) & \iff & \text{symétrie par rapport à l'origine} \end{array}$$

- **Périodicité** d'une fonction :
  f **périodique** $\iff f(x+T) = f(x) \iff$ invariance par translation horizontale de longueur T.

2 - Limite

On dit que f admet une limite (finie) au point p, s'il existe un réel L vérifiant : On dit que f admet une limite (finie) au point x_0, s'il existe un réel L vérifiant :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \quad \text{tel que} \ \ \forall\, x \in D_f \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

On démontre que le réel L, lorsqu'il existe, est unique et on l'appelle limite de f au point x_0. On le note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

3 - Continuité

Intuitivement une fonction est continue si on peut tracer son graphe sans lever le crayon, c'est-à-dire si son graphe ne présente pas de sauts. Attention, le graphe d'une fonction ne présente jamais de traits verticaux, car, à une valeur de x correspond au plus une valeur de y.

Si f est définie en x_0 et autour de x_0 , f est dite **continue en** x_0 si et seulement si (ssi) :

$$f \ \textbf{continue en} \ x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Exercice 1 :

A) Soit la fonction f définie par :

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x) = -x^2 & \text{pour} \quad x \in [0,1[\\ f(x) = -x & \text{pour} \quad x \in [1,2[\end{array}\right.$$

1. Préciser le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Tracer la courbe représentative de f.
3. La fonction f est-elle continue sur D_f ?

B) Soit g la fonction définie selon la fonction f précédente par :

$$\left\{\begin{array}{ll} g(x) = f(x) & \text{pour} \quad x \in [0,2[\\ g(x) = f(-x) & \text{pour} \quad x \in [-2,0[\end{array}\right.$$

1. Préciser le domaine de définition D_g de la fonction g.
2. Tracer la courbe représentative de g.
3. Que peut-on dire du graphe de g ? Que dit-on de la fonction g ?
4. Préciser les valeurs de la fonction g pour les valeurs négatives de x.

C) Soit la fonction $f_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ égale à la fonction f ci-dessus pour $x \in [0,2[$ et de période $T = 2$.

1. Tracer le graphe de f_T.
2. Étude pour les valeurs positives de x :
   (a) Expliciter la valeur de $f_T(x)$ pour $x = 3$, puis $x = 4$, $x = \frac{2}{5}$, $x = \frac{7}{5}$.
   (b) Expliciter la valeur de $f_T(x)$ pour $x \in [3,4[$ puis pour $x \in [4,5[$.
   (c) De façon plus générale, expliciter la valeur de $f_T(x)$ pour $x \in [2n, 2n+1[$ puis pour $x \in [2n+1, 2n+2[$ avec $n \in \mathbb{N}$.
3. La fonction f_T est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
4. Étude pour les valeurs négatives de x :
   (a) Expliciter la valeur de $f_T(x)$ pour $x \in [-2,-1[$ puis pour $x \in [-1,0[$.
   (b) De façon plus générale, expliciter la valeur de $f_T(x)$ pour $x \in [-(2n+2), -(2n+1)[$ puis pour $x \in [-(2n+1), -2n[$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par : $f : x \mapsto f(x) = \left\{\begin{array}{c} x \quad \text{pour } x \in \,]-\infty, 1] \\ \exp(x-1) \quad \text{pour } x \in \,]1,2] \\ x^2 \quad \text{pour } x \in \,]2,+\infty[\end{array}\right.$

1. Donner le domaine de définition D_f.
2. La fonction f est-elle continue en $x = 0$? $x = 1$? $x = 2$?
   Précisez sur quel domaine la fonction est continue.

Exercice 3 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f : x \mapsto f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{pour } x = 0 \\ x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{pour } x \neq 0 \end{array}\right.$

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.