le cnam

MVA005 - ED2 - Séries numériques à termes positifs

Rappels de cours : Comment déterminer la nature d'une série ?

- **Critère grossier de convergence :** (condition nécessaire de convergence)
  <u>Théorème</u> : Pour qu'une série de terme général u_n converge il faut que la suite (u_n) tende vers 0.
  Attention : Ceci n'est pas une condition suffisante ! Par ex., la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que son terme général $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

- **Séries géométriques :**
  Soit la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n$

  - si $a = 1$, la série diverge car $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n = n + 1$ et tend donc vers $+\infty$
  - si $a \neq 1$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ et :
    - $*$ si $|a| > 1$, a^n diverge et donc la série diverge
    - $*$ si $|a| < 1$, dans ce cas $a^n \longrightarrow 0$ et la série converge vers $\frac{1}{1-a}$

- **Séries de Riemann :**
  On appelle série de Riemann la série suivante : $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

  - si $\alpha \leq 1$, la série diverge
  - si $\alpha > 1$, la série converge

- **Théorème des comparaisons :**
  <u>Théorème</u> : Soient deux séries à termes positifs u_n et v_n. Supposons que pour tout n on ait $u_n \leq v_n$.

  - Si la série de terme général v_n converge il en est de même pour la série de terme général u_n.
  - Si la série de terme général u_n diverge il en est de même pour la série de terme général v_n.

- **Règle de D'Alembert:**
  <u>Théorème</u> : Soit une série de terme général u_n.

  - Si la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et est strictement inférieure à 1 la série converge.
  - Si la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et est strictement supérieure à 1 la série diverge.
  - On ne peut rien dire si la limite vaut 1.

- **Règle de Cauchy:**
  <u>Théorème</u> : Soit une série de terme général u_n.

  - Si la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ existe et est strictement inférieure à 1 la série converge.
  - Si la limite de $\sqrt[n]{u_n}$ existe et est strictement supérieure à 1 la série diverge.
  - On ne peut rien dire si la limite vaut 1.

Exercice :

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ de terme général u_n égal à :

1. $\left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{2n}$
2. $\dfrac{1}{n\cos^2(n)}$
3. $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$
4. $\dfrac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$
5. $\dfrac{n}{2^n}$
6. $\dfrac{1}{n!}$
7. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$