le cnam

MVA005 - ED1 - Suites numériques

Rappels de cours :

1 Définition d'une suite

Définition : Une **suite réelle** est un objet mathématique qui, à tout nombre entier naturel n associe un nombre réel : $\begin{array}{cccc} (u_n) & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \mapsto & u_n \end{array}$.
Le réel u_n est appelé **terme d'indice** n ou **terme de rang** n ou n**ième terme** de la suite de la suite (u_n).

Attention : (u_n) désigne la suite elle-même (analogie avec la fonction f), tandis que u_n (sans parenthèses) désigne le $n$ième terme de la suite.

2 Méthodes de génération d'une suite réelle

2.1 Par formule explicite

On peut définir une suite par une formule explicite du type $u_n = f(n)$. C'est-à-dire qu'il suffit, comme pour les fonctions, de faire le calcul de la valeur du terme u_n à n donné.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = 2n + 1$.

2.2 Par récurrence

Une suite définie par une relation liant u_{n+1} à u_n et un premier terme s'appelle une suite récurrente.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} = u_n + 2$, avec $u_0 = 0$

3 Suites et ordres

Suite majorée
C'est une suite (u_n) pour laquelle on peut trouver un nombre réel fixe M, vérifiant : $u_n \leq M$, pour tout entier n supérieur à un certain rang n_0 (on notera PCR dans la suite pour "à Partir d'un Certain Rang").

Suite minorée
C'est une suite (u_n) pour laquelle on peut trouver un nombre réel fixe m, vérifiant : $u_n \geq m$, à PCR.

Suite bornée
C'est à la fois une suite majorée et minorée.
Une suite est bornée si et seulement si il existe un réel $M > 0$ tel que : $|u_n| \leq M$ à PCR.

Suite croissante (respect. strictement croissante)
C'est une suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$ (respectivement $u_n < u_{n+1}$)

Suite décroissante (respect. strictement décroissante)
C'est une suite (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$ (respectivement $u_n > u_{n+1}$).

Suite monotone (respect. strictement monotone)
C'est une suite croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

4 Convergence d'une suite

4.1 Convergence vers une limite finie

<u>**Définition**</u> : On dit qu'un nombre réel fini ℓ est limite d'une suite numérique (u_n), et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si et seulement si :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On appelle suite **convergente** toute suite qui admet une limite finie.

<u>**Propriété**</u> : Toute suite convergente est bornée.
<u>Attention</u> : La réciproque n'est pas vraie ! Prenons par exemple la suite $u_n = \sin(n\frac{\pi}{2})$. Cette suite est bornée (en effet, $\forall n \in \mathbb{N},\ |\sin(n\frac{\pi}{2})| \leq 1$), mais cette suite n'est pas convergente : elle oscille entre -1 et 1.

<u>**Propriété**</u> : Toute suite réelle croissante et majorée est convergente et toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.
<u>Attention</u> : La réciproque n'est pas vraie ! Prenons par exemple la suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Cette suite converge vers 0, mais elle n'est pas monotone (ni croissante ni décroissante).

4.2 Convergence vers une limite infinie

Lorsqu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, on dit qu'elle **diverge**.

4.3 Opérations sur les limites

	Opérations possibles	Formes indéterminées
Somme	$\ell + \infty = \infty, \quad \infty + \infty = \infty$	$\infty - \infty$
Produit	$\ell \times +\infty = +\infty$, si $\ell > 0$ $\ell \times +\infty = -\infty$, si $\ell < 0$ $+\infty \times +\infty = +\infty, \quad +\infty \times -\infty = -\infty$	$0 \times \infty$
Rapport	$\frac{\ell}{\infty} = 0$, si $\ell \neq 0$ $\frac{\infty}{\ell} = \infty$, si $\ell \neq 0$	$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{\infty}{0}, \quad \frac{0}{0}$
Puissances	$\ell^0 = 1$ $0^\ell = 0$, si $\ell > 0$ $1^\ell = 1$	$0^0, \quad \infty^0$

5 Suites particulières

5.1 Suites arithmétiques

On appelle suite arithmétique toute suite pouvant s'écrire par récurrence comme :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} = u_n + r \quad \text{(formulation par \textbf{récurrence})} \\ \text{ou} \qquad & u_n = u_0 + nr \quad \text{(formulation \textbf{explicite})} \end{aligned}$$

où r est appelée la raison de la suite arithmétique (u_n).

Convergence d'une suite arithmétique :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_n &= -\infty \quad \text{si} \quad r < 0 \\ &= u_0 \quad \text{si} \quad r = 0 \\ &= +\infty \quad \text{si} \quad r > 0 \end{aligned}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique : On somme les n premiers termes de la suite et on obtient ainsi la somme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2} = \text{(nombre de termes)} \times \frac{\text{(premier terme + dernier terme)}}{2}.$$

5.2 Suites géométriques

On appelle suite géométrique toute suite pouvant s'écrire comme :

$$\begin{aligned} & u_{n+1} = u_n \times q \quad \text{(formulation par \textbf{récurrence})} \\ \text{ou} \qquad & u_n = u_0 \times q^n \quad \text{(formulation \textbf{explicite})} \end{aligned}$$

où q est appelée la raison de la suite géométrique (u_n).

Convergence d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} \text{si} \quad q > 1, &\quad \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \\ \text{si} \quad q = 1, &\quad \lim_{n \to +\infty} u_n = u_0 \\ \text{si} \quad |q| < 1, &\quad \lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \\ \text{si} \quad q \leq -1, &\quad \text{la suite diverge} \end{aligned}$$

Somme des termes d'une suite géométrique : On somme les n premiers termes de la suite et on obtient ainsi la somme :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \frac{\text{1 - raison}^{\text{nombre de terme}}}{\text{1 - raison}}.$$

Exercice 1

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -5$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{2}$.

1. Quel type de suite est-ce ? Quelle est sa raison ?
2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{18}$.
5. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes:

1. $A = 0,25 + 0,5 + 0,75 + \cdots + 12,5$.
2. $B = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{38}}$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \end{cases}$$

1. Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n > 0$ et $u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire sa nature (convergente ou divergente).
4. On définit une nouvelle suite (v_n) en posant $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   Exprimer la récurrence liant v_{n+1} à v_n. De quel type est la suite (v_n) ?
   En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n puis du terme général de la suite (u_n).
   Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
5. Montrer que pour $n > 0$: $u_n \geq \dfrac{1}{4n}$.

Exercice 4

- Définition : Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :
  - (u_n) est croissante
  - (v_n) est décroissante
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$
- Théorème des suites adjacentes : Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes réelles, alors ces deux suites sont convergentes et ont la même limite réelle l. De plus, pour tout entier n, $u_n \leq l \leq v_n$.

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} \\ v_n = u_n + \dfrac{1}{n!} \end{cases}$$

En utilisant les compléments de cours dans l'encadré ci-dessus, montrer que ces deux suites sont adjacentes. En déduire qu'elles sont convergentes et admettent la même limite.

Exercice 5

Étudier les suites suivantes, et donner leur limite lorsqu'elles convergent :

1. $u_n = \dfrac{e^n}{n^3}$
2. $u_n = \dfrac{3n+4}{9n+2}$
3. $u_n = \dfrac{(n+1)^3 - n^3}{n^2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sin\left(\dfrac{7\pi n}{2}\right)$
5. $u_n = \sin\left(\dfrac{7\pi n}{2}\right)$ (utiliser le deuxième rappel de cours ci-dessous)

Rappels de cours :

- Théorème des **croissances comparées** : Pour tous réels strictement positifs a et b :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)^a}{x^b} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)^b}{x^a} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0$
- Définition d'une sous-suite : On appelle **sous-suite** de (u_n), toute suite (v_k) telle qu'il existe une application strictement croissante ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $v_k = u_{\phi(k)}$.
  Ex:
  $v_k = u_{2n}$ est la sous-suite des termes pairs de (u_n).
  $w_k = u_{2n+1}$ est la sous-suite des termes impairs de (u_n).

  Propriété : Une suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si :
  - la sous-suite (u_{2n}) converge vers ℓ
  - la sous-suite (u_{2n+1}) converge aussi vers ℓ

Chloé Mimeau.