Attention:
CE DOCUMENT EST UNE BASE DE TRAVAIL QUI PEUT CONTENIR DES COQUILLES. LES ZONES EN BLEUS SONT, DE LOIN, HORS PROGRAMME, ET NE SONT LÀ QUE POUR LE LECTEUR DÉSIREUX D'ALLER PLUS AVANT. BONNE LECTURE !.

Suites et séries numériques, synthèse partielle, compléments éventuels.

1 Rappel sur les suites.

Soit $(u_n), n \in \mathbb{N}$ une suite réelle ou complexe, on dira que (u_n) converge vers l si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |u_n - l| < \varepsilon.$$

On sait également que toute suite de Cauchy réelle ou complexe est convergente, que toute suite réèlle croissante et majorée est convergente, que toute suite (réèlle) décroissante et minorée est convergente, mais que les réciproques sont fausses. *Il existe des suites convergentes qui ne sont ni croissantes majorées, ni décroissantes minorées.* On dira qu'une suite réelle ou complexe (u_n) est bornée si il existe M telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| < M$.

2 Définition

Soit $(u_n), n \in \mathbb{N}$ une suite (réelle ou complexe). On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n), n \in \mathbb{N}$ définie par

$$S_0 = u_0,\ \forall n \geq 0,\ S_{n+1} = S_n + u_{n+1}.$$

On note alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Les propriétés des suites se transposent pour les séries. On peut donc définir la somme de deux séries, la multiplication par un scalaire ...
On parlera de série numérique pour désigner les séries construites à partir des suites réelles.

3 Propriétés. Etudes de la convergence.

On dit que la série de terme général u_n converge si la suite (S_n) converge.
On note alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim S_n.$$

Ce n'est qu'une notation.
Conséquence: pour qu'une série $(u_n), n \in \mathbb{N}$ soit convergente il faut et il suffit que S_n soit une suite de Cauchy.
On écrit le critère de Cauchy comme suit

$$\forall \varepsilon, \exists N, \forall m \geq N, n \geq N, |S_m - S_n| < \varepsilon,$$

ou encore en prenant $m \geq n$

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+..+u_m|<\varepsilon.$$
On obtient alors une condition nécessaire

Proposition 1. Pour qu'une série numérique soit convergente il faut que son terme général tende vers 0.

La réciproque de cette proposition est fausse.
On dira qu'une série de terme général (u_n) est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ est convergente.
On peut voir alors facilement

Théorème 1. Toute série absolument convergente est convergente.

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. La réciproque est fausse.
La série $\frac{(-1)^n}{n}$ est semi convergente. On verra plus loin. Pour les séries à termes positifs, on a le critère

Théorème 2. Soit (u_n) une suite positive. La série de terme général u_n est convergente si et seulement si elle est bornée (ici majorée est suffisant)

Démonstration: En effet la série est alors une suite croissante majorée.

4 Séries positives. Comparaison à une intégrale.

La série $\frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

Supposons que l'on étudie une série de terme général u_n positif et qu'il existe une fonction positive $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ intégrable sur tout intervalle de $\mathbb{R}^+$, telle que
$$u_n=f(n).$$
On suppose que f est une fonction monotone décroissante. Etudions alors la convergence de la série.
On a
$$\begin{aligned}S_N-S_1&=\sum_{i=1}^N u_i=\sum_{i=1}^N f(i)\le\sum_{i=1}^N\int_{i-1}^i f(t)dt=\int_1^N f(t)dt,\\ S_N-S_1&=\sum_{i=1}^N u_i=\sum_{i=1}^N f(i)\ge\sum_{i=1}^N\int_i^{i+1} f(t)dt,\\ &=\int_1^{N+1} f(t)dt.\end{aligned}$$
On est donc ramener à étudier le comportement de $\int_1^N f(t)dt$.

Théorème 3. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Démonstration: C'est une simple utilisation des formules précédentes. La technique précédente permet de donner également des évaluations sur la rapidité de convergence.

5 Comparaison avec les séries géométriques.

5.1 Compléments sur les suites.

Soit (u_n) une suite réelle.

Définition 1. On appelle suite extraite de (u_n), toute suite (v_k), telle qu'il existe une application strictement croissante ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, vérifiant $v_k = u_{\phi(k)}$. On notera parfois (u_{n_k}) une telle suite extraite.

Définition 2. On appelle valeur d'adhérence de la suite (u_n) tout nombre λ réel ou $\pm\infty$ vérifiant la propriété suivante.
Si $\lambda = +\infty$ (resp $-\infty$), $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall P \in \mathbb{N}^+$, $\exists n > P$ tel que $u_n > N$ (resp $< -N$).
Si λ est réel, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall P \in \mathbb{N}$, $\exists n > P$, tel que $|u_n - \lambda| < \varepsilon$.

La suite définie par $u_n = (-1)^n$ possède deux valeurs d'adhérence qui sont $-1,1$.

Théorème 4. Toute suite réelle possède une valeur d'adhérence.

Démonstration:
Rappel: tout ensemble majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.
Si (u_n) n'est pas une suite bornée, le théorème est vrai, en effet dans ce cas la suite est non majorée ou non minorée, on applique alors la définition. Sinon la suite est bornée, et il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-M,M]$. On sait alors qu'est bien défini l'élément $\sup\limits_{k\geq n}\{u_k\}$ puisque cet ensemble est borné. Ceci nous définit une suite (v_n) décroissante car les ensembles sont inclus les uns dans les autres. Cette suite est également minorée donc elle est convergente vers un élément λ dont on va montrer qu'il est une valeur d'adhérence de la suite (u_n). En effet $\forall\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|v_n - \lambda| < \varepsilon/2$, dès que $n > N$. On choisit alors $n' > n$ tel que $|u'_n - v_n| < \varepsilon/2$ qui permet de conclure au fait que λ est une valeur d'adhérence de la suite initiale.
Toute suite r'eelle possédant une valeur d'adhérence on peut définir sa plus grande valeur d'adhérence et sa plus petite. La plus grande sera appelée limite supérieure de la suite, la plus petite sera appelée limite inférieure de la suite. Ces deux nombres sont éventuellement finis ou infinis. On les notera $\limsup = \overline{\lim}$ et $\liminf = \underline{\lim}$.

Proposition 2. La valeur d'adhérence construite dans la proposition précédente est la limite sup de la suite.

Démonstration:
Seul est à considérer le cas où la suite est majorée. Soit λ une valeur d'adhérence. Alors $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n > N$, $t.q.$, $|u_n - \lambda| < \varepsilon$. Donc $\lambda < u_n + \varepsilon$. Donc $\lambda < \sup\{u_k, k > N\} + \varepsilon$ et ceci $\forall N$. On passe à la limite dans l'inégalité et l'on obtient, $\lambda < \limsup(u_n) + \varepsilon$, ceci étant vrai pour tout ε, on obtient $\lambda \leq \limsup(u_n)$.

De même la suite $\inf\{u_k, k > n\}$ converge vers $\liminf$.
Soit (u_n) une suite réelle. Soit λ une valeur d'adhérence, il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective telle que la suite définie par $v_k = u_{\phi(k)}$ converge vers λ.
De plus si $\lambda = \limsup < +\infty$ (resp. $\lambda = \liminf > -\infty$) alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}\, tq\, \forall n > N$ on a $u_n < \lambda + \varepsilon$ (resp. $u_n < \lambda - \varepsilon$).
La première phrase signifie dans le cas où $|\lambda| < +\infty$ que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$, tel que $|u_n - l| < \varepsilon$. Cela veut dire que de toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.
Démonstration:
C'est une simple application des définitions.
Remarquons que ces définitions sont cohérentes. En effet:

Théorème 5. On a en effet (u_n) est une suite convergente si et seulement si $-\infty < \limsup u_n = \liminf u_n < +\infty$.

Démonstration: Si u_n est convergente vers l, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, n > N$ implique $|u_n - l| < \varepsilon$. Soit λ une valeur d'adhérence. Si $|ambda = \pm\infty$, alors $\forall M > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$ tel que $|u_n| > M$, en combinant les deux cas, l'on voit que $\forall M > 0$, $|l| > M - \varepsilon$ ce qui contredit que (u_n) converge, donc $|\lambda| < +\infty$. Donc $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$, tel que $|u_n - \lambda| < \varepsilon$. Donc par comparaison des deux inégalités, on obtient $|l - \lambda| < 2\varepsilon$. Donc $l = \lambda$.
Réciproquement si $l = \limsup u_n = \liminf u_n < +\infty$, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, tel que si $n > N$ alors $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$ ce qui prouve que (u_n) converge vers l.

5.2 Rappels sur les séries géométriques.

On appelle suite géométrique toute suite (u_n) telle que $\exists \rho \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n = \rho u_{n-1}$. on rappelle alors

Proposition 3. La série de terme général u_n est convergente si et seulement si $|\rho| < 1$ à moins que $u_0 = 0$.

Ce résultat est évident si l'on se rappelle des bonnes formules.

5.3 Règles de D'alembert et de Cauchy.

On considère (u_n) une suite dont les termes ne sont jamais nuls. On a ensuite le critère de D'alembert:

Théorème 6. Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 0$.
-Si $\exists C \in [0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq C$, la série de terme général (u_n) est convergente.
-Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la série de terme général (u_n) est divergente.

Pour aller plus loin et pour les séries non nécessairement positives: Si $\limsup |\frac{u_{n+1}}{u_n}| < 1$, la série de terme général u_n converge (absolument).

Si $\liminf |\frac{u_{n+1}}{u_n}| > 1$, la série diverge.
Si $\limsup |\frac{u_{n+1}}{u_n}| \geq 1 \geq \liminf |\frac{u_{n+1}}{u_n}|$, on ne peut rien dire.
Démonstration:
Supposons le premier cas. Par définition de la valeur d'adhérence, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $k > N$ $0 < |u_{k+1}| < (\lambda + \varepsilon)|u_k|$, où $\lambda = \overline{\lim}|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$ et $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que $0 < \lambda + \varepsilon < 1$. On conclut alors par la proposition ??valeurdad.
Le deuxième cas se traite de façon similaire.
On retrouve ainsi le cas des séries de puissance.
Enonçons le critère de Cauchy.

Théorème 7. Supposons $u_n > 0$.
-Si $\exists C \in [0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt[n]{u_n} < C$, la série de terme général u_n est convergente.
-Si $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, la série de terme général u_n est divergente.
En particulier si $\lim \sqrt[n]{u_n}$ exiiste et est < 1 alors la série de terme général u_n est convergente,
si $\lim \sqrt[n]{u_n}$ exiiste et est > 1 alors la série de terme général u_n est divergente. Si $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$ on ne peut rien dire.

Plus précisément Si $\limsup(|u_n|)^{\frac{1}{n}} > 1$ ou $= 1^+$ la série diverge,
si $\limsup(|u_n|)^{\frac{1}{n}} < 1$, la série converge absolument,
on ne peut rien dire dans les autres cas. theo Démonstration:
Tout à fait analogue à la démonstration de la règle de D'alembert. Dans le premier cas on voit que le terme général ne tend pas vers 0.

5.4 Comparaison des deux règles.

La règle de Cauchy est plus fine que la règle de D'alembert. On a en effet le théorème suivant

Théorème 8. Si $u_n > 0$, si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l(= +\infty)$ alors $\lim(u_n)^{\frac{1}{n}} = l$.

Ceci est une conséquence du fait que l'on a toujours
$$\liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \liminf(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup(u_n)^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$
theo Démonstration:
Considérons le cas où le premier terme est non nul, et le dernier fini. Soit $l = \liminf \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Soit $0 < l_1 < l_2 < l$. Et considérons la série de terme général $\frac{l_1^n}{u_n}$. Par la règle de D'alembert, cette série converge.
Donc $(u_n)^{\dfrac{1}{n}} > l_1$ dès que n est assez grand. Donc $\liminf(u_n)^{\frac{1}{n}} \geq l_1$, d'où la première inégalité. La deuxième s'obtient de manière identique, en prenant $L = \sup \frac{u_{n+1}}{u_n}$, $L < L_2 < L_1$ et la série de terme général $\frac{u_n}{L_1^n}$.

6 Séries semi- convergentes

6.1 Cas des séries alternées.

On appelle ainsi toute série (u_n) telle que $u_n = (-1)^n v_n$ où $v_n \geq 0$. On a alors
Si v_n tend vers 0 en décroissant alors la série converge (non absolument en général). theo Démonstration:
C'est une simple utilisation des suites adjacentes.

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge vers $-\ln 2$.

6.2 Critère d'Abel

Soit (u_n) une suite telle qu'il existe $M > 0$, tel que $\forall n > 0$ $\sigma_n = |\sum_{i=0}^{n} u_i| < M$ et soit (ε_n) une suite décroissante vers 0. La série de terme général $\varepsilon_n u_n$ est alors convergente . theo démonstration On effectue la transformation d'Abel pour appliquer le critère de Cauchy. Soit $m > n$. On a alors

$$\begin{aligned} |S_m - S_n| &\leq |\sum_{n+1}^{m} \varepsilon_i(\sigma_i - \sigma i - 1)| \\ &\leq |\sum_{n}^{m-1} \sigma_i(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})| + |\varepsilon_m \sigma_m| \\ &\leq M(\varepsilon_n + 2\varepsilon_m) \to 0 \end{aligned}$$

quand n,m tendent vers l'infini. La suite est donc de cauchy. Le théorème est donc démontré.
La série de terme général $\frac{\cos n}{n}$ est convergente. Elle n'est cependant pas absolument convergente. Pour démontrer cela, on commence par montrer que $\forall N \in \mathbb{N}$, on a

$$|\sum_{n=1}^{N} \cos n| \leq 2.$$

L'importance de ce critère est grande. On retrouve d'ailleurs le critère des séries alternées.

7 Produit de séries

Considérons deux séries de terme général (a_n) et (b_n) respectivement. On suppose que les deux séries convergent. On se demande comment calculer $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n . \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Si l'on calcule formellement ce produit, on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right),$$

et on peut se demander si la série de terme générale $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ converge vers

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n . \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n .$$

Dans le cas de deux séries positives la réponse est oui.

Théorème 9. Le produit de deux séries positives est la limite de la série citée plus haut.

Démonstration: Notons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, et $S_n = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{p+q=k} a_p b_q)$. On a alors $A_n B_n \geq S_n$ et $A_n B_n \leq S_{2n}$. Donc la suite S_n est majorée puisque le produit $A_n B_n$ converge. Donc elle converge, et les deux inégalités montrent que $\lim S_n = \lim A_n B_n$.
Le résultat est encore vrai dans le cas de deux séries a.c.

Théorème 10. Si (a_n) et (b_n) sont des séries absolument convergentes, alors avec les notations précédentes, S_n est une série absolument convergente, et converge vers ce que l'on attend.

Démonstration: La seule chose à démontrer et la convergence vers le produit des séries, à cause de l'inégalité triangulaire. Pour cela on a

$$|S_n - A_n B_n| \leq \sum_{p,\, q,\, p \leq n,\, q \leq n,\, p+q>n} |a_p| b_q| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} |a_p b_q| - |A_n| B_n|.$$

On conclut alors par le résultat sur les séries positives.