le cnam

MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Marco Caponigro
marco.caponigro@cnam.fr

Suites numériques

1 Définitions et notations

Définition 1.1. Soit E un ensemble. Une *suite* à valeurs dans E est une application

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & E \\ & n & \mapsto & u_n. \end{array} \tag{1}$$

Si $E = \mathbb{R}$ on dit que la suite est réelle. Si $E = \mathbb{C}$ on dit que la suite est complexe.

Remarque 1.2. Une suite réelle est un <u>ensemble infinie et ordonné</u> de elements dans E. On note cet ensemble par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté on notera tout simplement la suite par u_n. On note que l'ensemble des valeurs de la suite, noté $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble non ordonné. Les entiers n sont les *indices* de la suites et les images u_n sont les *termes* de la suite.

Il y a deux manières de définir une suite : la définition explicite ou la définition par recurrence. La définition explicite est donnée à partir d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui associe à chaque $n \in \mathbb{N}$ une valeur réelle $u_n = f(n)$. La définition par recurrence est donnée à partir d'un element $u_0 \in \mathbb{R}$ et d'une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quo associe à chaque terme le suivant:

$$u_{n+1} = F(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 1.3. Suites réelles définies explicitement

(*i*) $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(*ii*) $u_n = 1/(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(*iii*) $u_n = e^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les mêmes suites définies par recurrence:

(*i*) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(*ii*) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n/(u_n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = eu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.4 (Suite Arithmétique). La *Suite Arithmétique* est la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$u_{n+1} = u_n + a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où $a \in \mathbb{R}$ est dit *raison* de la suite Suite Arithmétique.

Exemple 1.5 (Suite Géométrique). La *Suite Géométrique* est la suite définir par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$u_{n+1} = ru_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

où $r \in \mathbb{R}$ est dit *raison* de la suite Suite Géométrique.

Définition 1.6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est:

i) *constante* si $u_{n+1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

ii) *croissante* si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

iii) *décroissante* si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

iv) *monotone* si elle est croissante ou décroissante ;

v) *strictement croissante* si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

vi) *strictement décroissante* si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

vii) *majorée* si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré ;

viii) *minorée* si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré ;

ix) *bornée* si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.

Définition 1.7. Soit u_n une suite réelle on dit que:

1. u_n est constant à partir d'un certain rang (ou *stationnaire*) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que u_n est constante pour tout $n \geq n_0$;

2. u_n est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$.

De façon similaire on peut définir les autres propriétés d'une suite réelle de la Définition 1.6 à partir d'un certain rang.

Remarque 1.8. Si u_n est majorée/minorée/bornée à partir d'un certain rang alors u_n est majorée/minorée/bornée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Convergence

Définition 2.1. Une suite u_n converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ (ou tend vers $\ell \in \mathbb{R}$) si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

On dit que ℓ est la limite de la suite u_n et on note

$$\ell = \lim_{n \to \infty} u_n$$

ou de façon equivalente

$$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Définition 2.2. Une suite u_n tend vers $+\infty$ si pour tout $M > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_n > M \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Une suite u_n tend vers $-\infty$ si pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_n < M \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Remarque 2.3. Une suite numérique non convergente est dite *divergente*. En particulier étant donnée une suite numérique on a que trois cas possibles :

- la suite converge à une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$;
- la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et en particulier est divergente;
- la limite $\lim_{n\to\infty}$ n'est pas définie et en particulier la suite est divergente.

Exemple 2.4 (Suite Arithmétique). On considère la Suite Arithmétique définie dans l'exemple 1.4 et on étudie sa convergence:

- si $a > 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- si $a = 0$ alors $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$;
- si $a < 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 2.5 (Suite Géométrique). On considère la Suite Géométrique définie dans l'exemple 1.5 et on étudie sa convergence en fonction de la donnée initiale u_0 et de la raison r. On a donc que si $u_0 = 0$ la suite est constante $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in \mathbb{R}$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Sinon quand $u_0 \neq 0$ on a que :

- si $r > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$;
- si $r = 1$ alors $u_n = u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en particulier $\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$;
- si $|r| < 1$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$;

- si $r = -1$ alors $u_n = (-1)^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier u_n ne converge pas.
- si $r < -1$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Définition 2.6. Une *soussuite* d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sélection $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ des éléments de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ est un sousensemble de $\mathbb{N}$ ordonné et infinie.

Proposition 2.7. *Sois $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. Chaque soussuite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.*

Proposition 2.8. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ou tend vers $\pm\infty$ alors sa limite est unique.*

Proposition 2.9. *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors elle est bornée.*

2.1 Suites monotones

Définition 2.10 (Borne supérieure)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}$. La *borne supérieure* de l'ensemble E, notée $\sup E$ est, s'il existe, le plus petit des majorants de E.
La borne supérieure $M = \sup(E)$ est caractérisée par

- $x \leq M$ pour tout $x \in E$ (M est un majorant) ;
- pour tout $y \in E$, si y est un majorant de E alors $M \leq y$ (M est le plut petit).

Définition 2.11 (Borne inférieure)**.** Soit $E \subset \mathbb{R}$. La *borne inférieure* de l'ensemble E, notée $\inf E$ est, s'il existe, le plus grand des minorants de E. La borne inférieure $m = \inf(E)$ est caractérisée par

- $x \geq m$ pour tout $x \in E$ (M est un minorant) ;
- pour tout $y \in E$, si y est un minorant de E alors $m \geq y$.

Théorème 2.12. *Soit u_n une suite réelle :*

- *Si u_n est croissante et majorée alors converge vers $\ell = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$;*
- *Si u_n est croissante et non majorée alors tend vers ∞ ;*
- *Si u_n est décroissante et minorée alors converge vers $\ell = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$;*
- *Si u_n est décroissante et non minorée alors tend vers $-\infty$;*

2.2 Opérations sur les limites

Proposition 2.13. *Soient u_n et v_n deux suites réelles convergentes à $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n\to\infty} v_n$. Alors*

i) la suite $(u_n + v_n)$ est convergente et

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell';$$

ii) la suite $(u_n \cdot v_n)$ est convergente et

$$\lim_{n\to\infty} (u_n \cdot v_n) = \ell \cdot \ell'.$$

2.3 Suites et fonctions continues

La définition de continuité par suites est un outil pour le calcul des limites

Définition 2.14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est *continue* en x_0 si et seulement si pour toute suite u_n qui converge vers x_0 on a que

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0).$$

Exemple 2.15. Montrer la convergence et calculer, s'il existe, la limite de la suite définie par

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) + 3n + 1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)} + \cos(2n)},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Critères de comparaison

Proposition 3.1. *Soient u_n, v_n et w_n suites réelles telles que*

$$u_n \leq v_n \leq w_n \qquad \textit{pour tout } n \geq n_0$$

pour quelque $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to\infty} w_n$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \ell$$

Proposition 3.2. *Soient u_n et v_n deux suites réelles telles que*

$$u_n \leq v_n \qquad \textit{pour tout } n \geq n_0$$

pour quelque $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors

- *Si* $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$*;*
- *Si* $\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$*.*

Définition 3.3. Soient u_n et v_n deux suites réelles. On dit que u_n est *équivalente* à v_n, et on note $u_n \sim v_n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n| \quad \text{pour tout } n \geq n_0.$$

Exemple 3.4.

- $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$
- $\sqrt{n^2+1} \sim n.$

Définition 3.5. Soient u_n et v_n deux suites réelles. On dit que u_n est *adjacente* à v_n, si et seulement si

i) $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ii) u_n est croissante

iii) v_n est décroissante

iv) $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0.$

Théorème 3.6. *Soient u_n et v_n deux suites adjacentes. Alors elles sont toutes les deux convergentes et elles ont la même limite.*

Exemple 3.7. On considère la suite définie par récurrence

$$S_1 = 1, \quad S_{n+1} = S_n + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

À partir de cela on considère les deux suites

$$u_n = S_{2n}, \qquad v_n = S_{2n+1}.$$

Les suites u_n et v_n sont adjacentes ont la même limite qu'on peut montrer être $\log(2)$.

4 Suites définies par recurrence

Théorème 4.1. *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Si la suite u_n définie par recurrence*

$$u_0 \in [a,b], \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge à une limite ℓ. Alors ℓ vérifie l'équation

$$f(\ell) = \ell, \qquad \ell \in [a,b]. \tag{2}$$

Une solution de (2) est *point fixe* de la fonction f.

5 Suites de Cauchy

Définition 5.1 (Suite de Cauchy)**.** On dit que u_n est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } |u_n - u_m| < \varepsilon$$

pour tout $n, m \geq N$.

Théorème 5.2. *Une suite réelle u_n est convergente si et seulement si est de Cauchy.*

Exemple 5.3. On va utiliser le Théorème pour montrer que la suite

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+2},$$

diverge. On va montrer que n'est pas une suite de Cauchy.