le cnam

MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Marco Caponigro
marco.caponigro@cnam.fr

Séries numériques

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1. On appelle *série de terme général* u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n := u_0 + u_1 + \cdots + u_n =: \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

L'n-ieme terme de la suite S_n s'appelle *somme partielle d'ordre* n.

On peut écrire la série de terme général u_n avec la notation $\sum u_n$.

Définition 1.2. On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite des sommes partielles converge à une limite finie. Dans le cas contraire on dit que la série $\sum u_n$ *diverge*.

Définition 1.3. La *somme* d'une série convergent $\sum u_n$ est la limite de la suite des sommes partielles S_n et est notée

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_n.$$

Étudier la nature d'une série $\sum u_n$ c'est étudier la convergence de cette série ou ce qui est équivalent étudier la convergence de sa suite des sommes partielles. Deux séries sont de la même nature si elles sont toutes de deux convergentes ou toutes deux divergentes.

Exemple 1.4. (Série Harmonique) La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. En fait pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$ on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k},$$

donc en intégrant

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

En sommant pour k allant de 1 à n on obtient

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1).$$

Donc comme $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$ on a $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Exemple 1.5. Comme montré la série $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente.

Exemple 1.6.

- Si u_n est une suite stationnaire et $u_n = 0$ à partir d'un certain rang N alors $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n;$$

- Si u_n est une suite stationnaire et $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\sum u_n$ est divergente car

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + 1 + \cdots + 1 = n + 1$$

et $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$;

Exemple 1.7 (Série Géométrique). On appelle sérié géométrique de raison $\rho \in \mathbb{C}$ la série $\sum \rho^n$. Les somme partielles sont

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \rho^k = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^n}{1-\rho} & \text{si } \rho \neq 1 \\ n+1 & \text{si } \rho = 1. \end{cases}$$

D'où on a que la série géométrique converge si et seulement si $|\rho| < 1$. Dans ce cas la somme de la série vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}.$$

1.2 Séries convergentes

Théorème 1.8. *Si la série* $\sum u_n$ *converge alors*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Proof. On considère la suite des sommes partielles

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

En particulier $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Si la série $\sum u_n$ converge par définition de convergence, voir Définition 1.2, on a que il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \ell.$$

Or

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \ell - \ell = 0.$$

□

Remarque 1.9. *La réciproque est fausse.* En fait si la suite u_n converge vers 0 la série $\sum u_n$ peut être divergente. Par exemple on considère la suite $u_n = \frac{1}{n}$: on a que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, comme montré dans l'Exemple 1.4.

Corollaire 1.10. *Si la limite de la suite u_n n'existe pas ou n'est pas finie alors la série $\sum u_n$ diverge.*

1.3 Propriétés algébriques

Proposition 1.11. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

i) la série $\sum(u_n + v_n)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

ii) la série $\sum \lambda u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Remarque 1.12. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge. Pour la somme de deux séries convergente il n'y a pas de résultat général.

2 Convergence absolue

Définition 2.1. Une série $\sum u_n$ *converge absolument* (ou est dite *absolument convergente*) si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 2.2. *Une série $\sum u_n$ absolument convergente est convergente. Dans ce cas*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

Exemple 2.3. La série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

est absolument convergente car $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente (voir Exemple **??**). Donc elle est convergente.

Remarque 2.4. La réciproque du Théorème 2.2 est fausse. C'est à dire que, en générale, une série convergente n'est pas absolument convergente. Par exemple la série harmonique alternée

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente lorsque sa série des valeurs absolues, la série harmonique, n'est pas convergente (voir Exemple 1.4).

3 Critères de convergence pour séries à terms positifs

Définition 3.1. Une série $\sum u_n$ est dite *à terms positifs* si $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.1 Critère de Base

Proposition 3.2. *Soit $\sum u_n$ une série à terms positifs et soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.*

- *La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Sa somme vaut alors*
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n.$$
- *La série $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.*

3.2 Comparaison à une intégrale

Proposition 3.3. *Soit $\sum u_n$ une série à terms positifs et supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*

(i) *$f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;*

(ii) *f est monotone décroissante ;*

(iii) *$u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} f(t)dt,$$
converge.

Exemple 3.4 (Série de Riemann). On considère la série définie pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par
$$\sum \frac{1}{n^\alpha}.$$
On a les cas suivants:

- si $\alpha \geq 0$ alors $\lim_{n\to\infty} 1/n^\alpha \neq 0$ et donc la série diverge.
- si $\alpha > 0$ alors on peut appliquer la Proposition 3.3 avec $f(x) = 1/x^\alpha$. Comme
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx, \qquad \text{converge si et seulement si } \alpha > 1$$
on a que
$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

3.3 Majoration

Proposition 3.5. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. Supposons qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$u_n \leq v_n, \qquad \text{pour tout } n \geq N.$$

Alors

(i) *si la série* $\sum v_n$ *converge la série* $\sum u_n$ *converge;*

(ii) *si la série* $\sum u_n$ *diverge la série* $\sum v_n$ *diverge.*

Proof. On considère les suites des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Les deux suites sont monotones croissantes et le résultat suit .

Si $\sum v_n$ converge alors T_n converge à une limite finie ℓ et S_n est donc majorée par ℓ. Si, d'autre part, $S_n \to +\infty$ alors, par comparaison, $T_n \to \infty$. □

3.4 Équivalence

Les séries associées à suites équivalentes ont la même nature comme énoncé par le résultat suivant.

Proposition 3.6. *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. Si*

$$u_n \sim v_n$$

Alors $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont tous les deux convergentes ou tous les deux divergentes.*

3.5 Critère de D'Alembert

Proposition 3.7. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que* $u_n > 0$ *à partir d'un certain rang. Supposons qu'il existe*

$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

Alors:

- $\ell > 1 \implies \sum u_n$ *diverge;*
- $\ell < 1 \implies \sum u_n$ *converge.*

Remarque 3.8. Si $\ell = 1$ on ne peut rien conclure à priori. Par exemple $\sum 1/n$ diverge alors que $\sum 1/n^2$ converge.

3.6 Critère de Cauchy

Proposition 3.9. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Supposons qu'il existe*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n},$$

Alors:

- $\ell > 1 \implies \sum u_n$ *diverge;*
- $\ell < 1 \implies \sum u_n$ *converge.*

4 Critères de convergence pour séries à terms quelconques

4.1 Convergence Absolue

Pour déterminer la nature d'une série $\sum u_n$ à termes quelconques on peut étudier la convergence absolue. En fait la série $\sum |u_n|$ est une série à termes positifs pour laquelle on peut appliquer les méthodes de la section precedente, Section 3. Le Théorème 2.2 donc implique la convergence de la série d'origine.

4.2 Critère des séries alternées

Définition 4.1. On appelle série alternée une série de la forme $\sum(-1)^n v_n$ (ou bien $\sum(-1)^{n+1} v_n$) où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs.

Proposition 4.2. *Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite à termes positifs, décroissante et* $\lim_{n\to infty} u_n = 0$ *alors* $\sum(-1)^n v_n$ *converge.*

Exemple 4.3 (Série de Riemann alternée). On considère la série définie pour $\alpha \in \mathbb{R}$ par

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

On a les cas suivants:

- Si $\alpha \leq 0$ alors le terme général ne tend pas vers 0 et donc la série diverge ;
- Si $\alpha < 0$ alors la série converge d'après le critère des séries alternées.

4.3 Critère d'Abel

Proposition 4.4. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $u_n = a_n b_n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*, où :*

(i) a_n *est positive, décroissante et convergente à* 0*;*

(ii) il existe $M > 0$ *tel que*

$$\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| \leq M \qquad \textit{pour tout } N \in \mathbb{N},$$

alors la série $\sum u_n$ *converge*

5 Produit de deux séries

Proposition 5.1. *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites à termes positifs telles que*

$$\sum u_n \quad et \quad \sum v_n$$

convergent. Alors la série de termes général

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right)$$

Dans le cas des séries à termes quelconques la convergence seule ne suffit pas et il faut demander la convergence absolue.

Proposition 5.2. *Soient*

$$\sum u_n \quad et \quad \sum v_n$$

deux séries absolument convergentes. Alors la série de termes général

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k$$

converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right)$$