MVA107 - Corrigé du devoir n°3

Exercice 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(a) Par le calcul on obtient $AW_1 = 4W_1$, $AW_2 = 4W_2$ on en déduit que 4 est une valeur propre d'ordre au moins 2, d'autre part ces deux vecteurs propres sont linéairement indépendants.

(b) On peut calculer la dernière valeur propre directement en factorisant le polynôme caractèristique ou simplement en remarquant que la trace de la matrice A est 12. donc la dernière valeur propre est aussi 4. finalement 4 est une valeur propre triple ;

(c) L'équation matricielle $(A - 4I)X = W_1 + bW_2$ se traduit par le système : $\begin{cases} \text{-x+2y+z=1} \\ \text{0=1+b} \\ \text{-x+2y+z=1-2b} \end{cases}$
d'où $b = -1$, si on choisit $y = z = 0$ alors
$V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) On en déduit que le calcul précédent était la recherche de vecteurs d'une base de Jordan, on a cherché dans le sous espace propre ici $V_2 = W_1 - W_2$ qui est associé à V_3 pour former un bloc de Jordan. La matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base (W_1, V_2, V_3) est donnée par :
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
La matrice de jordan qui peut être obtenue dans par $J = P^{-1}AP$ est donnée par :
$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(e) Le système differentiel $X'(t) = AX(t)$ se résoud en faisant le changement de fonction inconnue $X(t) = PY(t)$
On a donc $Y'(t) = JY(t)$, soit en intégrant : $Y(t) = exp(Jt)Y(0)$ et enfin :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & e^{4t} & (t-1)e^{4t} \\ e^{4t} & 0 & 0 \\ -e^{4t} & e^{4t} & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix}$$

D'où les solutions :

$$\begin{cases} x(t) = ae^{4t} + be^{4t} + c(t-1)e^{4t} \\ y(t) = ae^{4t} \\ z(t) = -ae^{4t} + be^{4t} + cte^{4t} \end{cases}$$

avec $a=y_1(0), b=y_2(0), c=y_3(0)$

Si on avait voulu $X(t)$ en fonction de $X(0)$ il aurait fallu calculer 'inverse de P et effectuer le produit : $Pexp(Jt)P^{-1}X(0)$

Exercice 2

(a) La matrice de la forme quadratique Q est donnée par :
$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Le polynôme caracteristique est $p(\lambda) = (3-\lambda)^2 - 4$.
Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$
L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ est donné par l'équation de droite $x+y=0$.
L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 5$ est donné par l'équation de droite $x-y=0$.
Les valeurs propres de la forme quadratique sont positives, on en déduit que la forme blinéaire associé est un produit scalaire.

(c) On veut une matrice orthogonale il faut donc choisir des vecteurs propres unitaires.
pour $\lambda_1 = 1$ on choisit le vecteur $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
pour $\lambda_2 = 5$ on choisit le vecteur $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
On en déduit la matrice de passage (orthogonale) :
$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$
Si $u = (x_1, x_2)$ alors
$Q(u) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{5}{2}(x_1 + x_2)^2$

(d) Par la méthode de Gauss, donner une expression de Q comme somme ou différence de carrés.
$Q(v) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 3(x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2) + 3x_2^2$, or $x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 = (x_1 + \frac{2}{3}x_2)^2 - \frac{4}{9}x_2^2$, d'où une des formes possibles : $Q(v) = 3(x_1 + \frac{2}{3}x_2)^2 - \frac{4}{3}x_2^2 + 3x_2^2 = 3(x_1 + \frac{2}{3}x_2)^2 + \frac{5}{3}x_2^2$
On pose $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
qui s'écrit encore $Y = P^{-1}X$.
Les colonnes de P représenteront les coordonnées des vecteurs d'une base orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique S car dans cette base la forme $Q(u) = t^{Y}IY$ d'où la matrice représentative de S est I .On connaît P^{-1} , par le calcul on déduit
$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

La méthode de Schmidt donne exactement la même base orthonormée : $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} e_1$, $c_2 = \frac{-2}{\sqrt{5}} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} e_2$

☆☆☆☆☆☆