MVA101 - Corrigé du devoir n°4

Exercice 1

(a) On a : $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$

Le rayon de convergence de cette série entière est 1 ; en effet cette série entière peut être obtenue en intégrant le developpement en série entière de $\dfrac{1}{1+x^2}$ sur le disque ouvert de convergence de rayon 1.

en posant $x = \dfrac{1}{p}$ on remarque immédiatement que $\arctan \dfrac{1}{p}$ admet au voisinage de l'infini le développement:

$\arctan \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{3p^3} + \dfrac{1}{5p^5} + ... + (-1)^n \dfrac{1}{(2n+1)p^{2n+1}} + ...$ cette dernière série converge pour $p > 1$

(b) Si n est un nombre impair on doit avoir a_n =0 car dans le développement de arctan il n'y a que des termes impairs. en revanche si n est un nombre pair on a:

$$\frac{a_n n!}{p^{n+1}} = \frac{(-1)^{n/2}}{(n+1)p^{n+1}}$$

Ainsi $a_n = \dfrac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}$ si n pair, 0 sinon.

(c) D'après la question précédente, $\arctan \frac{1}{p}$ peut s'écrire (pour $p > 1$): $\sum_{n \geq 0} \dfrac{a_n n!}{p^{n+1}}$. Par le resultat établi en cours, On en déduit que la série $\sum a_n t^n$ dont la somme $f(t)$ admet pour transformée de Laplace $\arctan \frac{1}{p}$ a un rayon de convergence infini.

Le critère de d'Alembert appliqué à $a_n = \dfrac{(-1)^{n/2}}{(n+1)!}$ et $n = 2p$ permet de retrouver ce résultat.

Exercice 2

On considère le système différentiel:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = 3x(t) - y(t) + z(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 3y(t) + z(t) \end{array}\right.$$

(a) On rappelle que : $\mathcal{L}(f')(p) = \mathcal{L}(f)(p) - f(0^+)$

donc, l'application de la transformation de Laplace à chaque ligne du système différentiel donne:

$$\left\{\begin{array}{l} (p-3)X(p) + Y(p) - Z(p) = 1 \\ -2X(p) + pY(p) + 2Z(p) = -1 \\ -3X(p) + 3X(p) + (p-1)Y(p) = 1 \end{array}\right.$$

(b) la solution du système est : $\left\{\begin{array}{l} X(p) = \dfrac{p-1}{(p-4)(p-2)} \\ Y(p) = \dfrac{-p}{(p+2)(p-2)} \\ Z(p) = \dfrac{p+5}{(p-4)(p+2)} \end{array}\right.$

(c) La décomposition en éléments simples donne:

$$\left\{\begin{array}{l} X(p) = \dfrac{3/2}{p-4} - \dfrac{1/2}{p-2} \\ Y(p) = \dfrac{-1/2}{p+2} + \dfrac{-1/2}{p-2} \\ Z(p) = \dfrac{3/2}{p-4} + \dfrac{-1/2}{p+2} \end{array}\right.$$

(d) On revient au système initial car $\mathcal{L}(e^{at})(p) = \dfrac{1}{p-a}$:

$x(t) = 3/2e^{4t} - 1/2e^{2t}$
$y(t) = -1/2e^{-2t} - 1/2e^{2t}$
$z(t) = 3/2e^{4t} - 1/2e^{-2t}$

(e) Ce sont bien les solutions du système comme on peut le vérifier, de plus, en faisant $t = 0$, on retrouve bien les conditions initiales.

✫ ✫ ✫ ✫ ✫ ✫