MVA101 - Corrigé du devoir n°1

Exercice 1

On considère la suite réelle définie par:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n}), u_0 = \frac{1}{2}$$

1°) Montrer par récurrence que cette suite est à termes strictement positifs.

Montrons donc ce résultat par récurrence:
<u>Initialisation:</u>
u_0 est un terme positif.
<u>Hérédité</u>
Si u_n est positif, u_{n+1} l'est aussi puisque somme de nombres positifs.
On a ainsi montré que u_n est positif pour tout entier n.

2°) On pose $w_n = \dfrac{-1 + u_n}{1 + u_n}$, trouver une relation entre deux termes consécutifs de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a: $w_{n+1} = \dfrac{-1 + \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})}{1 + \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})} = (\dfrac{u_n - 1}{u_n + 1})^2 = w_n^2$

Donc $w_1 = w_0^2$, $w_2 = w_0^4$,

Montrons par récurrence que $w_n = w_0^{2^n}$
<u>Initialisation:</u>
La propriété est vraie pour $n = 1$.

<u>Hérédité</u>
Si $w_n = w_0^{2^n}$ alors, $w_{n+1} = w_n^2 = (w_0^{2^n})^2 = w_0^{2^{n+1}}$.

mais $w_0 = -\dfrac{1}{3}$ on en déduit donc que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Ecrivons le terme u_n en fonction du terme w_n, on a: $u_n = \dfrac{-1 - w_n}{w_n - 1}$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 1. (Remarquer que le dénominateur ne s'annule jamais car $|w_n| < |w_0|$ et $|w_0| = \frac{1}{3}$, et donc que u_n a toujours un sens .)

$\boxed{\textbf{Exercice } 2}$

A) On considère la suite réelle définie par:

$v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n}, v_0 = 1$

1°) Etudier la fonction $f(x) = \sqrt{12 + x}$ sur l'intervalle $[1, 4]$, puis démontrer que $f(x)$ appartient à $[1, 4]$; en déduire que v_n est strictement compris entre 1 et 4 pour $n \geq 1$.

Calculons la dérivée de la fonction f: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{12 + x}}$
La fonction f' est positive pour $x \in [1, 4]$ Donc f est croissante.
Les réels $f(1)$ et $f(4)$ sont dans l'intervalle $[1, 4]$. Comme f croissante, si $1 < x < 4$ alors $f(1) < f(x) < f(4)$.
Ainsi: $1 < f(x) < 4$.

Maintenant par récurrence, montrons que v_n est strictement compris entre 1 et 4 pour $n \geq 1$:
Initialisation:
v_1 est dans l'intervalle $]1, 4[$, la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité
D'après l'étude de la fonction précédente, si $v_n \in]1, 4[$, $v_{n+1} = f(v_n) = \sqrt{12 + v_n} \in]1, 4[$.
Et donc $v_n \in]1, 4[$ quel que soit l'entier $n \geq 1$.

2°) On pose $w_n = 4 - v_n$, démontrer que pour tout entier naturel, on a: $w_{n+1} < \dfrac{1}{4}w_n$

On écrit $w_{n+1} = 4 - \sqrt{12 + v_n}$ et on multiplie par la quantité conjuguée haut et bas On a donc:

$$w_{n+1} = \frac{(4 - \sqrt{12 + v_n})(4 + \sqrt{12 + v_n})}{4 + \sqrt{12 + v_n}} = \frac{16 - (1 + v_n)}{4 + \sqrt{(12 + v_n)}} < \frac{4 - v_n}{4}$$
$$< \frac{w_n}{4}$$

3°) En déduire la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes tous positifs en effet, on a vu en 1) que $v_n \in [1, 4]$.
D'après la question précédente $w_n < \dfrac{1}{4}w_{n-1}$ quel que soit l'entier n.
Donc par itérations:

$$0 < w_n < (\frac{1}{4})^2 w_{n-2} ... \text{ etc } ... \; 0 < w_n < (\frac{1}{4})^n w_0$$

La limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc nulle, car cette suite est encadrée par deux suites de limites nulles.

B) On considère la série entière $v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + ...$

1°) Déduire du A-1) que le rayon de convergence de cette série est plus petit que 1.

Comme v_n est dans l'intervalle $[1, 4]$, d'après la question A-1) $1 \leq v_n \leq 4$, donc pour tout entier k, pour tout réel x , $|x^k| \leq v_k |x^k|$ et la série $\sum v_k |x^k|$ est minorée par une série géométrique $\sum |x^k|$ qui diverge pour $|x| > 1$ donc elle diverge aussi pour $|x| > 1$, son rayon de convergence est donc inférieur ou égal à 1.

2°) (Facultative) Déduire que le rayon de convergence est exactement 1.

On prend l'autre inégalité $v_k |x^k| \leq 4|x^k|$ qui montre que la série $\sum v_k |x^k|$ est majorée par une série géométrique $\sum 4|x^k|$ qui converge pour $|x| < 1$ donc elle converge aussi pour $|x| < 1$, son rayon de convergence R est donc supérieur ou égal à 1. finalement $R = 1$.
Remarque: Le lemme d'Abel vu en cours démontre directement que le rayon de convergence R est égal à 1: en prenant $\alpha = 1$, on a $|v_n \alpha^n| < 4$ de plus si $\beta > 1$, $|v_n \beta^n|$ n'est pas bornée. Donc le rayon de convergence est exactement 1.

☆☆☆☆☆☆