Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 18 décembre 2012

Exercices pour la séance numéro 12

Exercice 1) Deux transformées de Fourier
On note H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. Montrer que pour z nombre complexe de partie réelle strictement négative, on a pour $\omega \in \mathbb{R}$, $[\mathcal{F}(H(t)\,\exp(z\,t))](\omega) = \frac{1}{i\omega - z}$. De façon analogue, montrer que si z est de partie réelle strictement négative, on a $[\mathcal{F}(H(-t)\,\exp(z\,t))](\omega) = \frac{1}{z - i\omega}$.

Exercice 2) Transformée de Fourier des dérivées de la masse de Dirac
Sachant que de façon très génerale, la dérivée d'une distribution T est donnée par la relation $< T' \,, \varphi > = - < T \,, \varphi' >$ quand on la fait agir sur une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, montrer que la dérivée $n$ième $\delta^{(n)}$ de la masse de Dirac agit sur une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ selon $< \delta^{(n)} \,, \varphi > = (-1)^n \, \varphi^{(n)}(0)$. En déduire que la transformée de Fourier de la dérivée $n$ième de la masse de Dirac est un monôme : $[\mathcal{F}(\delta^{(n)})](\omega) = (i\,\omega)^n$.

Exercice 3) Convolution par les dérivées de la masse de Dirac
On rappelle que pour calculer le produit de convolution $T * U$ des distributions T et U contre une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on calcule d'abord la fonction test auxiliaire $\psi(x) = < U_{(y)} \,, \varphi(x+y) >$, où $U_{(y)}$ signifie que la distribution U agit sur la variable y. Si la fonction ψ introduite plus haut appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide, on peut calculer $< T * U \,, \varphi > \equiv < T \,, \psi >$. Démontrer que l'on a les relations suivantes $(\delta * T)^{(n)} = \delta^{(n)} * T = \delta * T^{(n)} = T^{(n)}$ pour une distribution quelconque $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 4) Calcul d'une réponse impulsionnelle
On note δ la masse de Dirac en zéro. On cherche une fonction $h(t)$ de la forme $h(t) = g(t)\,H(t)$ où g est une fonction du temps et H la fonction de Heaviside. Montrer que si $h(t)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{1}{\omega_0^2}\,h''(t) + h(t) = \delta$, alors elle s'écrit nécessairement $h(t) = \omega_0\,\sin(\omega_0\,t)\,H(t)$.