Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 20 novembre 2012

Exercices pour la séance numéro 08

Exercice 1) Convolution de la porte et transformation de Fourier
Soit T un réel strictement positif et P_T la fonction "porte" définie par $P_T(t) = 1$ pour $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon. Montrer que le produit de convolution $P_t * P_T$ est une fonction φ_T définie par $\varphi_T(t) = t + T$ pour $-T \leq t \leq 0$, $\varphi_T(t) = T - t$ pour $0 \leq t \leq T$ et $\varphi_T(t) = 0$ sinon. En déduire la transformée de Fourier de la fonction φ_T.

Exercice 2) Transformation de Fourier de la Gaussienne.
On admet que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}$. En déduire la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ de la Gaussienne $f(t) \equiv \exp(-t^2/2)$.

Exercice 3) Transformation de Fourier du sinus cardinal
Pour t réel, on définit le sinus cardinal $\mathrm{sinc}(t)$ par la relation $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$. A l'aide de la transformée de Fourier d'une porte bien choisie et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier du sinus cardinal.

Exercice 4) Autour de la transformée de Fourier d'une loi de Cauchy
Pour t réel, une loi de Cauchy est une fonction de la forme $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. A l'aide de la transformée de Fourier de la fonction $\exp(-a\,|\,t\,|)$ et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$. En déduire la transformée de Fourier des fonctions $g(t) = \frac{1}{10+6\,t+t^2}$ et $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

Exercice 5) Quelques intégrales
A partir des résultats de l'exercice numéro 1, expliciter la transformée de Fourier du carré du sinus cardinal, c'est à dire de la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Même question pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4}\,\mathrm{d}t$. Préciser, selon les valeurs du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$, les valeurs prises par l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\cos(\omega\,t)\,\mathrm{d}t$.