

Exercices pour la séance numéro 06

Exercice 1) Calcul d'une transformée de Laplace

Soit ω un nombre réel fixé et $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \leq 0$. On pose $\varphi(t) = \exp(i\omega t)H(t)$. Calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}\varphi$ de la fonction φ .

Exercice 2) Changement d'échelle

Soit a un nombre réel strictement positif fixé. Etablir la relation de changement d'échelle $[\mathcal{L}(f(ta))](p) = \frac{1}{a}(\mathcal{L}f)\left(\frac{p}{a}\right)$. L'appliquer aux fonctions sinus et cosinus pour retrouver les expressions de $\mathcal{L}(H(t) \sin(\omega t))$ et $\mathcal{L}(H(t) \cos(\omega t))$ à partir des relations $[\mathcal{L}(H(t) \sin(t))](p) = \frac{1}{1+p^2}$ et $[\mathcal{L}(H(t) \cos(t))](p) = \frac{p}{1+p^2}$.

Exercice 3) Dérivation et transformée de Laplace

Etablir par récurrence les relations générales

$$[\mathcal{L}f^{(n)}(t)](p) = p^n (\mathcal{L}f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

$$\text{et } \frac{d^n}{dp^n}(\mathcal{L}f)(p) = (-1)^n [\mathcal{L}(t^n f(t))](p).$$

Exercice 4) Calcul de quelques transformées de Laplace

Avec les notations introduites à l'exercice 1, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes : $f_1(t) = H(t) \exp(2t) \cos(\omega t)$,
 $f_2(t) = H(t - \frac{\pi}{3}) \cos(t - \frac{\pi}{3})$, $f_3(t) = H(t) \cos(t - \frac{\pi}{3})$ et $f_4(t) = H(t) t \cos(3t)$.

Exercice 5) Calcul de quelques originales

Calculer les fonctions $f_j(t)$ dont la transformée de Laplace est donnée par les fonctions $F_j(p)$ suivantes :

$$F_1(p) = \frac{1}{(p-2)(p-3)}, \quad F_2(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-3)}, \quad F_3(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+5}, \quad F_4(p) = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}.$$

Pour ce dernier cas, on pourra décomposer la fraction en éléments simples sous la forme $\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} \equiv \frac{\alpha}{p+3i} + \frac{\beta}{p-3i} + \frac{\gamma}{(p+3i)^2} + \frac{\delta}{(p-3i)^2}$.

Exercice 6) Equations différentielles

Calculer pour $t > 0$ les solutions $y_j(t)$ des équations différentielles suivantes :

$$\frac{dy_1}{dt} + 4y_1(t) = t + 2, \quad y_1(0) = 3, \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + y_2(t) = t, \quad y_2(0) = 1, \quad \frac{dy_2}{dt}(0) = 0, \\ \frac{dy_3}{dt} + y_3(t) = \sin t, \quad y_3(0) = 0 \quad \text{et la solution } (x(t), y(t)) \text{ du système différentiel} \\ \frac{dx}{dt} = x(t) + 5y(t), \quad \frac{dy}{dt} = x(t) - 3y(t), \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$