Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 30 octobre 2012

Exercices pour la séance numéro 05

Exercice 1) Intégrale simple et intégrale double
La plupart des propriétés de l'intégrale double ont leur équivalent pour l'intégrale simple. A partir des notes de cours, énoncer en regard de chaque propriété de l'intégrale double la propriété équivalente de l'intégrale simple.

Exercice 2) Utilisation du théorème de Tonnelli
Soit D le demi-disque $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer sa surface en utilisant les deux façons de faire que suggère le théorème de Tonnelli.

Exercice 3) Utilisation du théorème de Fubini
Soit T le triangle $T = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale $\int_T \big(x + y - \frac{1}{2}\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Calculer cette intégrale de deux façons différentes.

Exercice 4) Convolution dans l'espace $\mathbf{L}^1$
On se donne f et g deux fonctions intégrables c'est à dire telles que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid \, \mathrm{d}x \equiv \parallel f \parallel_1$ et $\int_{\mathbb{R}} \mid g(x) \mid \, \mathrm{d}x \equiv \parallel g \parallel_1$ sont finies. On note cette propriété $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors le produit de convolution $f * g$ appartient aussi à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et qu'on a l'inégalité $\parallel f * g \parallel_1 \leq \parallel f \parallel_1 \parallel g \parallel_1$.

Exercice 5) Changement de l'ordre d'intégration
On se donne une fonction f bornée sur $]0,\, 1[^2$. Ecrire l'intégrale double $\int_0^1 \mathrm{d}y \,\big[\, \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\, f(x,\, y)\,\big]$ à l'aide d'une intégrale de la forme $\int_0^1 F(x)\, \mathrm{d}x$, où F est une fonction qu'on précisera. Achever le calcul pour $f(x,\, y) \equiv 1$.

Exercice 6) Intégrale de Gauss
On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $G = \int_0^\infty \exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)\, \mathrm{d}x$. Après avoir montré que cette intégrale définit bien un nombre, relier sa valeur à celle de l'intégrale double $I = \int\int_{]0,\, \infty[\, \times\,]0,\, \infty[} \exp\big(-\frac{x^2+y^2}{2}\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Calculer ensuite I en passant en coordonnées polaires. En déduire la valeur de G.

Exercice 7) Aire contenue par une ellipse
On se donne $a > 0$, $b > 0$ et on note E le disque elliptique bordé par l'ellipse d'équation $\big(\frac{x}{a}\big)^2 + \big(\frac{y}{b}\big)^2 = 1$. Grâce au changement de variables $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$, calculer l'aire de E.