

## Exercices pour la séance numéro 04

### Exercice 1) Signal intégrable

On note  $H(\bullet)$  la fonction de Heaviside :  $H(t) = 1$  pour  $t > 0$  et  $H(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ . Montrer que le signal défini pour  $t$  réel par  $h(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(\frac{t}{RC}\right) H(t)$  est un signal intégrable :  $\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty$ .

### Exercice 2) Causalité

On se donne une fonction  $h(\bullet)$  et le filtre  $T$  défini par son action sur un signal analogique  $u$  :  $Tu = h * u$ . Montrer que si la réponse impulsionnelle  $h$  est causale, c'est à dire  $h(t) = 0$  dès que  $t < 0$ , il en est de même du filtre  $T$ .

### Exercice 3) Parité

Soit  $f$  une fonction paire et  $g$  une fonction impaire. Montrer que le produit de convolution  $f * g$  est impaire. Reprendre la question lorsque  $f$  et  $g$  sont toutes deux paires ou toutes deux impaires.

### Exercice 4) Dérivation

Soient  $f$  et  $g$  deux signaux tels que le produit de convolution  $f * g$  est bien défini. On suppose  $f$  dérivable et le produit de convolution  $f' * g$  défini. Quelle relation proposez-vous pour calculer  $\frac{d}{dt}(f * g)$  ?

### Exercice 5) Calcul d'un produit de convolution

On se donne  $a > 0$  et la porte  $\chi$  par les conditions  $\chi(t) = 1$  pour  $-a < t < a$  et  $\chi(t) = 0$  sinon. Calculer le produit de convolution  $f = \chi * \sin$ . Montrer que c'est une fonction impaire. Pouvait-on prévoir le résultat ? calculer d'une part la dérivée  $f'$  et d'autre part la convolée  $g = \chi * \cos$ . Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Exercice 6) Un autre produit de convolution**

Si  $\chi$  désigne la porte introduite à l'exercice précédent et  $\text{sgn}$  la fonction "signe" définie par  $\text{sgn}(t) = 1$  pour  $t > 0$  et  $\text{sgn}(t) = -1$  pour  $t \leq 0$ , calculer le produit de convolution  $\chi * \text{sgn}$ . Est-il continu ? Est-il dérivable ? Quelle est la valeur de la fonction dérivée  $\frac{d}{dt}(\chi * \text{sgn})$  lorsqu'elle est définie ? Les fonction  $\chi$  et  $\text{sgn}$  sont-elles continues ? dérivables ? Si on note  $\chi'$  et  $\text{sgn}'$  les fonctions dérivées lorsqu'elles sont définies, calculer les produits de convolution  $\chi' * \text{sgn}$  et  $\chi * \text{sgn}'$ . Que constatez-vous ?

**Exercice 7) Produit de convolution et équation différentielle**

On se donne deux réels  $0 < a < b$ . On pose  $f(t) = \exp(-ta)H(t)$  où  $H$  est la fonction de Heaviside définie au premier exercice de cette feuille. On pose aussi  $g(t) = \exp(-tb)H(t)$ . Calculer le produit de convolution  $f * g$  et représenter graphiquement cette fonction. Même question lorsque  $b = a$ . En déduire la solution de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} + ay = 5 \exp(-ta)$  avec la condition initiale  $y(0) = 11$ .