Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 16 octobre 2012

Exercices pour la séance numéro 03

Exercice 1) Signaux bornés
Démontrer que les signaux $t \longmapsto \frac{1}{t}$ et $t \longmapsto \log t$ sont des signaux non bornés sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0,\, 1]$.

Exercice 2) Signaux bornés et d'énergie finie
Soit $T > 0$ un réel stritement positif. Montrer qu'un signal analogique borné sur $[0,\, T]$ est nécessairement d'énergie finie. Si $f \in \mathrm{L}^\infty(0,\, T)$, alors $f \in \mathrm{L}^2(0,\, T)$. En d'autres termes, $\mathrm{L}^\infty(0,\, T) \subset \mathrm{L}^2(0,\, T)$.
Montrer qu'un signal numérique d'énergie finie $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ est nécessairement borné : $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Exercice 3) Fonction "porte"
Soient a et b deux nombres réels. La fonction "porte" $P_{ab}(t)$ est définie par $P_{ab}(t) = 1$ pour $a < t < b$ et $P_{ab}(t) = 0$ sinon. On note $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside (ou "créneau") : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \leq 0$. Montrer qu'on a la relation $P_{ab}(t) = H(t-a) - H(t-b)$ pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$.

Exercice 4) Un exemple classique
Dans cet exercice, on suppose que α est un réel strictement positif fixé. Pour t non nul, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on la relation $f \in \mathrm{L}^1(0,\, 1)$? $f \in \mathrm{L}^2(0,\, 1)$? $f \in \mathrm{L}^\infty(0,\, 1)$? $f \in \mathrm{L}^1(1,\, +\infty)$? $f \in \mathrm{L}^2(1,\, +\infty)$? $f \in \mathrm{L}^\infty(1,\, +\infty)$? [Six réponses en tout.]

Exercice 5) Bosse glissante
Pour k entier naturel et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(t) = \frac{1}{1+(t-k)^2}$. Montrer que $f_k(t)$ converge simplement vers la fonction nulle. Montrer aussi que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, c'est à dire que la convergence n'est pas uniforme. Si on se donne en revanche un réel $T > 0$, montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(0,\, T)$.

Exercice 6) Convergence d'une série de Fourier
On se donne une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la série associée $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mid \alpha_k \mid$ converge. Montrer à l'aide du critère de Cauchy que la suite de fonctions $S_N(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \cos(\frac{2k\pi t}{T})$ converge uniformément vers une fonction qu'on notera f. En déduire que dans ce cas, la somme f de la série de Fourier est une fonction continue du temps.