

Exercices pour la séance numéro 02

Exercice 1) Coefficients de Fourier

Soit g un polynôme trigonométrique de la forme

$$(1) \quad g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \left[\alpha_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) + \beta_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) \right].$$

Montrer que le coefficient de Fourier β_k est donné par la relation

$$\beta_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) dt.$$

Exercice 2) Transformée de Fourier de la dent de requin

On se donne $T > 0$. La "dent de requin" est une fonction f périodique de période T , discontinue pour les valeurs de la forme $k\pi$ avec k entier, affine sur l'intervalle $]0, T[$ où l'on a $f(t) = \frac{t}{T}$. Montrer que le développement en série de Fourier de f s'exprime sous la forme

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right).$$

Exercice 3) Transformée de Fourier de la corde pincée

Soit β un réel non nul. Montrer qu'on a

$$(2) \quad \int_0^1 \theta \exp(i\beta\theta) d\theta = \left[\frac{1}{\beta^2} (\cos\beta - 1) + \frac{1}{\beta} \sin\beta \right] + i \left[\frac{1}{\beta^2} \sin\beta - \frac{1}{\beta} \cos\beta \right].$$

On se donne α de sorte que $0 < \alpha < 1$. On définit la "corde pincée" comme la fonction c périodique de période 1, continue sur \mathbb{R} , affine sur les intervalles $[0, \alpha]$ et $[\alpha, 1]$ de sorte que $c(0) = c(1) = 0$ et $c(\alpha) = 1$. Après avoir vérifié que $c(\theta) = \min\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1-\theta}{1-\alpha}\right)$, déduire de la relation (2) que le développement en série de Fourier de la corde pincée est donné par la relation

$$(3) \quad c(\theta) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha(1-\alpha)\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \left[(\cos(2k\pi\alpha) - 1) \cos(2k\pi\theta) \right. \\ \left. + \sin(2k\pi\alpha) \sin(2k\pi\theta) \right] \end{array} \right.$$

Exercice 4) Théorème de Parseval

On approche un signal f périodique de période T et d'énergie finie, c'est à dire une fonction $f \in L^2(0, 1)$ de carré intégrable, par une série de Fourier à l'aide d'une relation analogue à (1). Montrer qu'on a l'égalité suivante, dite de Parseval :

$$\alpha_0^2 + \sum_{k \geq 1} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \frac{1}{T} \int_0^1 |f|^2 dt.$$