Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe" 02 octobre 2012

Exercices pour la séance numéro 01

Exercice 1) Exponentielle

A partir de la relation générale $\exp(x+y) = (\exp x)\,(\exp y)$, montrer qu'on a

$$\exp 0 = 1 \text{ et } \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Exercice 2) Trigonométrie

Etablir les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2 \sin \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2} \\
\cos p + \cos q &= 2 \cos \tfrac{p+q}{2} \cos \tfrac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \tfrac{p+q}{2} \sin \tfrac{p-q}{2} \,.
\end{aligned}$$

Exercice 3) Fonction réciproque

Montrer la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 4) Intégration par parties

On désigne par k un entier supérieur ou égal à 1. Etablir les relations

$$\int_0^1 \theta \cos\big(2k\pi\,\theta\big)\mathrm{d}\theta = 0\,, \quad \int_0^1 \theta \sin\big(2k\pi\,\theta\big)\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2k\pi}\,.$$

Exercice 5) Changement de variables dans une intégrale

Montrer qu'on a les égalités suivantes

$$\int_0^\pi \sin^2 t \, \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,.$$

Exercice 6) Intégrale généralisée

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ est convergente et qu'elle vaut π.

Exercice 7) Equation différentielle

On désigne par a un nombre réel. Montrer que l'équation d'évolution

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\,u(t) = 0$$

jointe à la condition initiale $u(0) = u_0$ entraîne que l'on a nécessairement

$$u(t) = \exp(-at)\,u_0$$

pour tout réel t.