MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Examen Session 2, 10 avril 2019, durée : 3 heures

CORRIGÉ

Exercice 1 : Séries entières

Déterminer le rayon de convergence R des sèries entières suivantes et étudier, le cas échéant, la série quand $|x| = R$:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)^2}{(n+1)^{n+1}} x^n$

Corrigé : *D' après le critère de D'Alembert on a*

$$\frac{n^2}{(n+2)^{n+2}} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \frac{1}{n+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $R = +\infty$.

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{ne^{n+1}} x^n$

Corrigé : *D' après le critère de Cauchy on a*

$$\sqrt[n]{\frac{1}{ne^{n+1}}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

D'où $R = e$. *Or, pour* $x = e$ *la série devient*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{ne^{n+1}} e^n = \frac{1}{e} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

qui est la série harmonique altérnée, qui converge. D' autre part, pour $x = -e$ *la série devient*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{ne^{n+1}} = \frac{1}{e} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

qui est la série harmonique, qui diverge.

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{3^n} x^n$

Corrigé : *On sait que* $|\cos(n)| \leq 1$. *Donc pour le critère de comparaison on a* $R \geq 3$, *car il est plus grand du rayon de convergence de la série de terme général* $1/3^n$. *Mais pour* $x = 3$, *ainsi que pour* $x = -3$, *la série est divergente car le terme général* $\cos(n)$ *ne tend pas vers* 0. *Donc* $R = 3$.

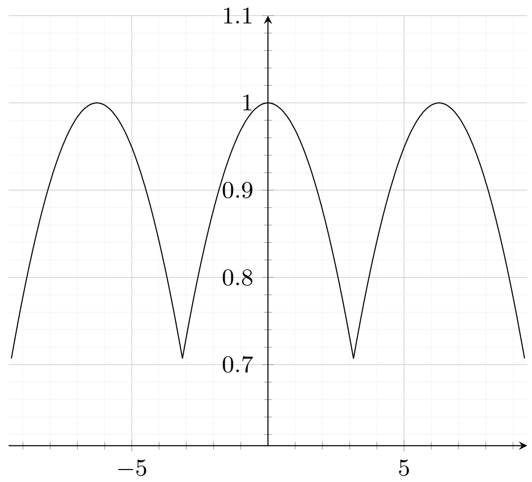
Exercice 2 : Série de Fourier

Soit f la fonction paire, périodique de période 2π, définie par

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{4}\right), \qquad \text{pour } x \in [0, \pi].$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$.

   Corrigé :



2. Déterminer la série de Fourier trigonométriques $S(f)$ de f ;

   Corrigé : *La function est paire et donc on a $b_n = 0$,*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x/4)dx$$

   et

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x/4)\cos(nx)dx$$

   pour tout $n \geq 1$. Pour calculer les coefficients a_n on pourra utiliser l' identité $2\cos u \cos v = \cos(u+v)\cos(u-v)$. On obient

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{(-1)^n 4\sqrt{2}}{\pi(1-16n^2)}.$$

3. Étudier la convergence de cette série (simple et uniforme);

   Corrigé : *Comme la fonction f est continue alors on a convergence uniforme (et donc simple). De plus $f(x) = S(f)(x)$ pour tout x.*

4. Déterminer la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-16n^2}.$$

   Corrigé : *On considère l'identité $f(x) = S(f)(x)$ en $x = \pi$ afin d'obtenir*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1-16n^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 : Transformée de Laplace

1. Résoudre le système linéaire suivant les valeurs du paramétre $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (4-p)X - 2Y &= 1, \\ X + (1-p)Y &= -1. \end{cases} \tag{1}$$

   Corrigé : *on a*

$$X = -\frac{p+1}{p^2-5p+6}, \quad Y = \frac{p-5}{p^2-5p+6}$$

2. Déterminer a_1, a_2, a_3 et a_4 réels tels que

$$\frac{p+1}{p^2-5p+6} = \frac{a_1}{p-2} + \frac{a_2}{p-3}, \quad \text{et} \quad \frac{p-5}{p^2-5p+6} = \frac{a_3}{p-2} + \frac{a_4}{p-3}.$$

Corrigé :

$$\begin{aligned} a_1 &= -3 \\ a_2 &= 4 \\ a_3 &= 3 \\ a_4 &= -2 \end{aligned}$$

3. Pour tout p, soit $(X(p), Y(p))$ l'unique solution su système (1). Trouver deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ dérivables sur $[0, +\infty[$ dont les transformées de Laplaces vérifient $\mathcal{L}(x)(p) = X(p)$ et $\mathcal{L}(y)(p) = Y(p)$.
Corrigé :
$$x(t) = 3e^{2t} - 4e^{3t}, \quad et \quad y(t) = 3e^{2t} - 2e^{3t}.$$

4. Résoudre, á l' aide de la transformée de Laplace, le système d'équations différentielles
$$\begin{cases} x'(t) &= 4x(t) - 2y(t), \\ y'(t) &= x(t) + y(t), \end{cases}$$
avec données initiales
$$x(0) = -1, \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

Exercice 4 : Algèbre linéaire

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y - z,\ x - z + t,\ y - t,\ x + 2y - z - t).$$

1. Écrire la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Corrigé :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $w = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Résoudre le système linéaire :
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
et en déduire que w n' appartient pas à $\mathrm{Im}(f)$.
Corrigé :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
Le système n' a pas des solutions car les deux dernières lignes sont incompatibles.

3. Résoudre le système homogène :
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Corrigé :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc les solutions verifient

$$x + y - z = 0, \quad \textit{et} \quad -y + t = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - t \\ t \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

4. L'endomorphisme f est-il surjective ou injective ? Quelle sont les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$?
   Corrigé : *L' endomorphisme f n' est ni surjective ni injective, de plus* $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

5. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Corrigé : *À partir du point 3. de l' exercice on obtient que* $\mathrm{Ker}(f)$ *est engendré par les vecteurs*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$