Année universitaire 2017-2018

MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Examen 1ère session du 07/02/2018

Enseignants responsables :

Marco Caponigro et Chloé Mimeau

Durée : 3 heures

Les calculatrice sont interdites

Tous les documents autorisés

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

Vérifiez que vous disposez bien de la totalité des pages du sujet en début d'épreuve et signalez tout problème de reprographie le cas échéant.

le cnam MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Examen Session 1, 7 février 2018, durée : 3 heures

Tous documents autorisés. Les calculatrices sont interdites et inutiles. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Suites de fonctions

On considère la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ par

$$f_n(x) = nx^n \ln(x), \qquad x \in]0,1],$$

et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. On note $g_n = f - f_n$. Calculer $g_n'(x)$ pour $x \in]0,1]$. Pour quelle valeur de x la suite de fonctions $g_n'(x)$ s'annule-t-elle ? En déduire les variations de g_n sur $]0,1]$.
3. En déduire que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in [0,1[$. Puisque $e^{-1/n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, on remarque qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$. D'après les variations de g_n étudiées à la question 2, en déduire le sens de variation de g_n pour $x \in [0,a]$ et montrer que
$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(a) - f_n(a)|.$$
5. Montrer alors que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,a]$, avec $a \in]0,1[$.

Exercice 2 : Séries entières

On considère la fonction réelle de variable réelle définie par

$$g(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\, dt.$$

1. Montrer que g satisfait l'équation différentielle suivante
$$g'(x) + xg(x) = 1. \tag{1}$$
2. On cherche à présenter la solution de cette équation différentielle sous la forme d'une série entière de la forme
$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \tag{2}$$
À partir des relations (1) et (2), donner l'expression de l'équation différentielle satisfaite par la série entière et en déduire que
$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}\right] x^n = 1. \tag{3}$$

3. Montrer que la suite (a_n) vérifie les relations suivantes [*]

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = g(0) = 0 \\ a_1 = g'(0) = 1 \\ a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} = 0, \qquad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{array}\right.$$

4. Écrire la troisième relation $a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} = 0$ pour $n = 1, 3, 5$ puis pour $n = 2, 4, 6$. En déduire la valeur des termes d'indices pairs de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer par récurrence que les termes impairs sont égaux à

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n+1)}.$$

5. En déduire le développement en série entière de la fonction g.
6. Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

Exercice 3 : Séries de Fourier

Soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi[$. (Sachant que $e^{-\pi} \simeq 0,043$ et $e^{\pi} \simeq 23,14$).
2. Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot e^{inx}\, dx = (-1)^n \frac{2\sinh(\pi)}{1+in}$.
3. En déduire les coefficients a_n et b_n de la série de Fourier <u>réelle</u> de f et donner l'expression de la série [†].
4. Étudier la convergence de la série. En particulier on précisera la convergence de la série en $x = 0$ et $x = \pi$.
5. En déduire la valeur des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

<u>Formulaire</u> : $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}.$

Exercice 4 : Algèbre linéaire

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z,\ y + z + t,\ 0,\ x + y + 3z + 2t)$$

1. Après avoir rappelé explicitement les vecteurs e_1, e_2, e_3, e_4 de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, déterminer les images par f de chacun de ces vecteurs.
2. Écrire la matrice A représentant l'application f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
3. Soit $w = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il n'existe pas de vecteur $v \in \mathbb{R}^4$ tel que $f(v) = w$.
4. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont des combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
5. En déduire la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ et déterminer $\mathrm{Im}(f)$. f est-elle surjective ?
6. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$? Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

[*] Justifier chacune des égalités.

[†] On remarquera que $\cos(nx) = Re(e^{inx})$ et que $\sin(nx) = Im(e^{inx})$