MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Examen Session 1, 6 février 2019, durée : 3 heures

Tous documents autorisés. Les calculatrices sont interdites et inutiles. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 : Séries entières

Déterminer le rayon de convergence R des sèries entières suivantes et étudier, le cas échéant, la série quand $|x| = R$:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n!} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n 2^{n+2}} x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{3^{n+1}} x^n$

Exercice 2 : Série de Fourier

Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par $f(x) = |\sin(x)|^3$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$. Quelle est la parité de la fonction f?
2. Déterminer la série de Fourier trigonométriques $S(f)$ de f ;
3. Étudier la convergence de cette série (simple et uniforme);
4. Déterminer la somme de la série :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)(4k^2-9)}.$$

Exercice 3 : Transformée de Laplace

1. Résoudre le système linéaire suivant les valeurs du paramétre $p \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} (3-p)X + 2Y & = -1, \\ X + (4-p)Y & = 1. \end{cases} \tag{1}$$
2. Déterminer a_1, a_2, a_3 et a_4 réels tels que
$$\frac{p-4}{p^2-7p+10} = \frac{a_1}{p-2} + \frac{a_2}{p-5}, \quad \text{et} \quad \frac{p-6}{p^2-7p+10} = \frac{a_3}{p-2} + \frac{a_4}{p-5}.$$
3. Pour tout p, soit $(X(p), Y(p))$ l'unique solution su système (1). Trouver deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ dérivables sur $[0, +\infty[$ dont les transformées de Laplaces vérifient $\mathcal{L}(x)(p) = X(p)$ et $\mathcal{L}(y)(p) = Y(p)$.

4. Résoudre, á l' aide de la transformée de Laplace, le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) &= 3x(t) + 2y(t), \\ y'(t) &= x(t) + 4y(t), \end{cases}$$

avec données initiales

$$x(0) = 1, \quad \text{et} \quad y(0) = -1.$$

Exercice 4 : Algèbre linéaire

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$f(x, y, z, t) = (x + 2y - 2z,\ x - z + t,\ 2y - z - t,\ 3x + 2y - 4z + 2t).$$

1. Écrire la matrice A représentant l'application f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $w = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Résoudre le système linéaire :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   et en déduire que w n' appartient pas à $\mathrm{Im}(f)$.

3. Résoudre le système homogène :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que la famille de vecteurs $(2, 1, 2, 0)$ et $(-2, 1, 0, 2)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
5. L' endomorphisme f est-il surjective ou injective ? Quelle sont les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$?