Date de l'examen : 29 janvier 2008 de 18h-21h	
TITRE de l'ENSEIGNEMENT : **Calcul scientitique CSC104**	
sous-titre : **Analyse numérique matricielle et optimisation**	
Année universitaire : 2007-2008	
Examen première session	
Documents autorisés : Tous les documents sont autorisés.	

Exercice 1 *Résolution d'un système singulier*

(10 points)

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ qui est supposée symétrique mais non définie et dont le noyau est de dimension $p < N$.

- **Question 1.** Combien A a-t-elle de valeurs propres nulles? On notera $\{w_k\},\ k = 1, p$ une base orthonormale dans $\mathbb{R}^N$ du noyau de A.

- **Question 2.** Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^N$ non nul. Montrer que si $\exists k \in \{1, p\}$ tel que $(b, w_k)_N \neq 0$ alors l'équation:
$$Ax = b \tag{1}$$
ne peut pas avoir de solution.

- **Question 3.** Montrer que la projection orthogonale dans $\mathbb{R}^N$ de b sur le noyau de la matrice A s'écrit:
$$P_0(b) = \sum_{k=1,p} (b, w_k)_N w_k.$$

- **Question 4.** On pose $b_0 = b - P_0(b)$ et on considère l'équation:
$$Ax_0 = b_0. \tag{2}$$
Montrer que (2) admet une solution définie à un élément du noyau de A près.

- **Question 5.** Parmi l'ensemble des solutions de (2) montrer qu'il en existe une et une seule qui soit de norme minimale (en utilisant la norme euclidienne de l'espace $\mathbb{R}^N$). Donner son expression.

- **Question 6.** Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère le problème de perturbation suivant:
$$\begin{cases} \text{trouver } z_\varepsilon \in \mathbb{R}^N \quad \text{tel que:} \\ Az_\varepsilon + \varepsilon z_\varepsilon = b. \end{cases} \tag{3}$$
Sous quelle(s) condition(s) portant sur ε, l'équation (3) admet-elle une solution unique? Montrer que si ε est assez petit mais non nul, on peut toujours se placer dans ce cas.

- **Question 7.** On pose *a priori*:

$$z_\varepsilon = \frac{z_{-1}}{\varepsilon} + z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots$$

En reportant dans (3) et en identifiant les termes de même puissance en ε montrer que l'on a nécessairement:

$$Az_{-1} = 0, \tag{4}$$

$$Az_0 + z_{-1} = b, \tag{5}$$

$$Az_1 + z_0 = 0, \tag{6}$$

etc.
Déduire de (4) que:

$$z_{-1} = \sum_{k=1,p} \alpha_k w_k. \tag{7}$$

Puis en utilisant (5) montrer que l'on peut calculer les coefficients α_k à l'aide de b et de P_0. En déduire que l'on peut calculer z_0 sous la forme:

$$z_0 = z_{00} + z_{01} \text{ où } z_{00} \in Ker(A) \text{ et } \ \forall k = 1, p, \ \ (z_{01}, w_k)_N = 0. \tag{8}$$

En utilisant (6) ou la question 5, montrer que $z_{00} = 0$. En déduire que z_1 peut être calculé à un élément du noyau près que l'on choisira nul dans la suite.

- **Question 8.** on pose:

$$\delta = z_\varepsilon - \frac{z_{-1}}{\varepsilon} - z_0 - \varepsilon z_1. \tag{9}$$

Vérifier que:

$$A\delta + \varepsilon\delta = -\varepsilon^2 z_1, \tag{10}$$

puis que:

$$(A\delta, \delta)_N + \varepsilon ||\delta||_N^2 \leq c\varepsilon^2 ||\delta||_N, \tag{11}$$

où c est une constante ne dépendant que de z_1 et que l'on explicitera.

- **Question 9.** On suppose que la matrice A est positive. Déduire de la question précédente qu'il existe une constante c' telle que:

$$||z_\varepsilon - \frac{z_{-1}}{\varepsilon} - z_0||_N \leq c'\varepsilon. \tag{12}$$

- **Question 10.** Conclure en quelques phrases sur l'intérêt de la méthode de perturbation précédente pour résoudre le système matriciel (1), en particulier si $z_{-1} = 0$. A quelle hypothèse sur b cela correspond-t-il?

Exercice 2 *Régulation de la température dans un deux pièces.*
(10 points)

On note $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ les deux températures dans un appartement chauffé par une seule chaudière dont la température de fonctionnement est notée u. Le modèle régissant l'évolution de ces températures est le suivant où $a > 0$ et $K > 0$ (on ne le discutera pas):

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2K & K \\ K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^2. \tag{13}$$

On écrira symboliquement ce système sous la forme suivante:

$$\dot{y} = Ay + ub \text{ où } A = \begin{pmatrix} -2K & K \\ K & -K \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \tag{14}$$

- **Question 1.** Quelles sont les valeurs propres, notées λ_1 et λ_2, de A? Donner une base de vecteurs propres orthonormée de A que l'on notera $\{w_1, w_2\}$ (on résoudra le système singulier $(A - \lambda_k I)w_k = 0,\ k = 1, 2)$.

- **Question 2.** En posant $y = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ mettre les système (14) sous la forme suivante:
$$\dot{\alpha}_1 = \lambda_1 \alpha_1 + ug_1 \text{ et } \dot{\alpha}_2 = \lambda_2 \alpha_2 + ug_2. \tag{15}$$
On précisera les coefficients qui interviennent dans ces expressions ainsi que les conditions initiales pour $\alpha_1(0)$ et $\alpha_2(0)$.

- **Question 3.** On s'intéresse par exemple à la première des deux équations précédentes. Posons:
$$J^\varepsilon(u) = \frac{1}{2}|\alpha_1(T) - \alpha_{1d}|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^T u^2(t)dt \tag{16}$$
où α_1 est la solution de (15). Le problème de régulation posé consiste alors à minimiser $J^\varepsilon(u)$ par rapport à u qui est la commande. En reprenant le cours et sans le détailler, montrer que l'équation d'optimalité s'écrit:
$$\varepsilon u + g_1 p_1 = 0, \tag{17}$$
où p_1 est solution de:
$$\dot{p}_1 = -\lambda_1 p_1,\ p_1(T) = \alpha_1(T) - \alpha_{1d}. \tag{18}$$

- **Question 4.** Résoudre (18) sous la forme:
$$p_1(t) = De^{\lambda_1(T-t)} \tag{19}$$
et on précisera D en fonction de $\alpha_1(T) - \alpha_{1d}$. En déduire que la commande optimale est donnée par:
$$u(t) = -\frac{g_1 p_1(t)}{\varepsilon}. \tag{20}$$

- **Question 5.** Donner la solution analytique en α_1 correspondant à cette commande optimale. Tracer la dans les différents cas où:
$$\alpha_1(0) > \alpha_{1d}, \;\; \alpha_1(0) = \alpha_{1d}, \;\; \alpha_1(0) < \alpha_{1d}.$$

- **Question 6.** Quel est le cas intéressant pour la régulation thermique? Expliquer pourquoi on ne s'intéresse qu'au cas où $\alpha_1(0) < \alpha_{1d}$? Tracer les variations de $u(t)$ dans ce cas. Que se passe-t-il si $\lambda T \to \infty$?

- **Question 7.** Dans quel(s) cas la commande optimale trouvée pour le vecteur propre w_1 est-elle aussi la commande optimale pour l'autre vecteur propre? Est-ce réaliste?

- **Question 8.** On reprend le système couplé avec les deux pièces et on introduit le critère:
$$J^{2,\varepsilon}(u) = \frac{1}{2}\{|y_1(T) - y_{1d}|^2 + |y_2(T) - y_{2d}|^2 + \varepsilon \int_0^T u^2(t)dt\}, \tag{21}$$
et on se propose ici encore de minimiser $J^{2,\varepsilon}(u)$ par rapport à u. On introduit l'état adjoint $p(t) \in \mathbb{R}^2$ solution de:
$$\dot{p} = -Ap, \quad p(T) = \begin{pmatrix} y_1(T) - y_{1d} \\ \\ y_2(T) - y_{2d} \end{pmatrix}. \tag{22}$$
Donner la solution $p(t)$ sous forme d'une exponentielle matricielle. Comment s'écrit l'équation d'optimalité du problème de commande optimale?

- **Question 9.** En reportant dans l'équation (14) l'expression de la commande optimale fonction de $p(T)$ et donc de $y(T)$, donner explicitement le système matriciel 2×2 dont y est solution à l'optimum.

- **Question 10.** Que se passe-t-il formellement dans le système précédent si $\varepsilon \to 0$?