le cnam

MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel

Examen seconde session, 05 avril 2017

Enseignants responsables :

François Dubois et Chloé Mimeau

Durée 3 heures

Les calculatrice sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles

et transmises lors des cours,

sous forme papier

et à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

le cnam **MVA101 - Analyse et Calcul Matriciel**

Examen Session 2, 05 avril 2017, durée : 3 heures

Les notes de cours personnelles et transmises lors des cours sont autorisées, sous forme papier et à l'exclusion de tout autre document. Les calculatrices sont interdites et inutiles. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.

Afin de faciliter la correction, merci de rédiger les exercices 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part, sur des copies séparées.

Exercice 1 : Séries numériques

- Soit la série de terme général $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \forall\, n \geq 0.$

1) À l'aide de la formule $a^N = \exp(N\ \ln(a))$, ré-écrire le terme général u_n sous forme exponentielle.

2) Utiliser le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ quand $x \to 0$ dans l'expression obtenue précédemment. Rappel : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$.

3) En déduire que $u_n \sim e^{1/2}e^{-n}$ quand n tend vers l'infini.

4) La série de terme général u_n est-elle convergente ?

- Soit la série de terme général $v_n = \dfrac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}, \quad \forall\, n \geq 3.$

5) En comparant $\ln(e^n - 1)$ à $\ln(e^n) = n$, montrer que le terme général v_n de cette série est supérieur au terme général de la série harmonique. En déduire la nature de la série.

Exercice 2 : Séries entières

1) Factoriser le polynôme $x^2 - 5x + 4$ en un produit de deux polynômes du premier degré.

2) On pose $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$. Utiliser le résultat précédent pour calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f.

3) Montrer que le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $f'(x)$ peut s'écrire : $S = A \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + B \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, et donner une expression des constantes A et $B \in \mathbb{R}$ ainsi que des suites a_n et b_n.

4) Quel est le rayon de convergence de la série entière S trouvée à la troisième question ?

5) En déduire le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0.

Exercice 3 : Série de Fourier
On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = |\sin t|$.

1) Représenter rapidement la fonction f et montrer que f est périodique et que $f(t+\pi) = f(t)$ pour tout nombre réel t.

2) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\mathrm{d}t$.

3) On se donne un entier naturel k supérieur ou égal à 1. Calculer les intégrales $J_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,\cos\big(2kt\big)\,\mathrm{d}t$.

4) Montrer que les intégrales $L_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,\sin\big(2kt\big)\,\mathrm{d}t$ sont nulles pour tout entier k.

5) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de la fonction f.

6) Appliquer le thérorème de Parseval pour calculer exactement la somme
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\,(2k-1)^2}.$$

Rappel : Soit f une fonction T-périodique, alors les coefficients de sa décomposition en série de Fourier sont : $a_0 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$ et pour $k \geq 1$:
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\,dt.$$

Formulaire : $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$, $\qquad \sin^2(a) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2a)}{2}$,
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

Exercice 4 : Algèbre linéaire
On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de E.

On s'intéresse à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et on note f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$.

1) Rappeler explicitement les vecteurs e_1, e_2 et e_3 de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer l'image par f d'un vecteur quelconque $u = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$. En déduire l'expression de l'application f.

3) Montrer que f est une application linéaire.

4) Soient $w = (3,0,1)$ et $v = (x,y,z)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. En résolvant le système $Av = w$, montrer que l'équation $f(v) = w$ ne possède pas de solution v.

5) Soient $v_1 = (-1,1,0)$ et $v_2 = (1,1,1)$. Montrer que la famille $\{v_1, v_2, e_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

6) On note B la matrice de f exprimée dans la base $\mathscr{B}' = \{v_1, v_2, e_2\}$. Donner la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice B.